Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 15.1.2012.

Прва група

1. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (x - y + 5z + 4t, 2x - 2y + 4z + 7t, 3x - 3y + 3z + 10t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

2. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x - y + 3z, 2x - 3y, -2x + 2y - 5z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

3. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима
   $f_1 = (1, 0, 1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7)$ и $f_3 = (1, 2, 8, 6, 9)$.
   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 15.1.2012.

Друга група

1. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (x + 3y - z + 4t, 2x + 6y + 2z, x + 3y + 3z - 4t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

2. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x + 4z, -x + y - z, -x - 3z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

3. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима
   $f_1 = (2, 2, 1, 0, 0)$, $f_2 = (5, 3, 2, 1, 1)$ и $f_3 = (2, -5, -3, 2, 3)$.
   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.