**Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, април 2009.**

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & + & 6t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & + & 4t & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & z & + & 5t & = & 4. \end{array}$$

2. Нека је $U$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1, \; 2, \; -2, \; 1) \\ u_2 & = & (3, \; 1, \; -2, \; 0) \\ u_3 & = & (2, \; 2, \; -1, \; -1) \\ u_4 & = & (0, \; 3, \; -1, \; 0), \end{array}$$

а $V$ потпростор генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (1, \; -2, \; 1, \; 0) \\ u_2 & = & (2, \; -3, \; 0, \; 1). \end{array}$$

Наћи базу и димензију за просторе $U$, $V$, $U+V$ и $U \bigcap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са
$L(x, y, z) = (x + 2z, 2x - y + 3z, 4x + y + 8t)$.

**а)** Одредити матрицу оператора $L$ у односу на канонску базу $e$ простора $\mathbb{R}^3$.

**б)** Израчунати ранг и дефект оператора $L$.

**в)** Испитати да ли је $L$ инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора $L^{-1}$ у односу на базу $e$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A$.
Испитати да ли је матрица $A$ дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу $P$ и дијагоналну $D$ тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (1, -1, 3, 3)$ на потпростор $U$ векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (3, 2, 2, 3)$ и $e_2 = (5, 3, 3, 5)$.
Затим израчунати растојање вектора $v$ од потпростора $U$.

6. Нека је $V$ потпростор простора $\mathbb{R}^3$ генерисан векторима
$f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 2, 1)$ и $f_3 = (1, 0, 3)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за $V$.