

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t &= 4 \\ 9x + 4y + z + 7t &= 2. \end{aligned}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ u_2 &= (1, 1, -1, -1) \\ u_3 &= (4, 2, 4, 2), \end{aligned}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, -1, 1) \\ v_2 &= (2, -2, 0, 0). \\ v_3 &= (3, -3, 1, -1). \end{aligned}$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора \mathbb{R}^3 дефинисан са

$$L(x, y, z) = (x + 3z, x + y + 3z, y + z).$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора \mathbb{R}^3 .

б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (0, 0, 0, 4)$ на потпростор U векторског простора \mathbb{R}^4 који је генерисан векторима

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (2, 0, -1, 1) \text{ и } e_3 = (0, 1, 1, 0).$$

Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U .

6. Нека је V потпростор простора \mathbb{R}^3 генерисан векторима $f_1 = (3, 0, 4)$, $f_2 = (-1, 0, 7)$ и $f_3 = (2, 9, 11)$.

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V .

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t &= 4 \\ 9x + 4y + z + 7t &= 2. \end{aligned}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора \mathbb{R}^4 генерисан векторима

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ u_2 &= (1, 1, -1, -1) \\ u_3 &= (4, 2, 4, 2), \end{aligned}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, -1, 1) \\ v_2 &= (2, -2, 0, 0). \\ v_3 &= (3, -3, 1, -1). \end{aligned}$$

Наћи базу и димензију за просторе U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора \mathbb{R}^3 дефинисан са

$$L(x, y, z) = (x + 3z, x + y + 3z, y + z).$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора \mathbb{R}^3 .

б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (0, 0, 0, 4)$ на потпростор U векторског простора \mathbb{R}^4 који је генерисан векторима

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (2, 0, -1, 1) \text{ и } e_3 = (0, 1, 1, 0).$$

Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U .

6. Нека је V потпростор простора \mathbb{R}^3 генерисан векторима $f_1 = (3, 0, 4)$, $f_2 = (-1, 0, 7)$ и $f_3 = (2, 9, 11)$.

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V .