Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, април 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & + & 9z & + & 10t & = & 11 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & 6t & = & 7 \\ 6x & - & 3y & + & 7z & + & 8t & = & 9. \end{array}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1, 0, -3, 2) \\ u_2 & = & (2, 1, -4, 1) \\ u_3 & = & (-1, 1, 5, -5), \end{array}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (1, 1, 1, 1) \\ v_2 & = & (2, 3, 8, 3) \\ v_3 & = & (2, 1, -4, 1). \end{array}$$

Наћи базу и димензију за просторе U, V, $U+V$ и $U \bigcap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x,y,z) = (-x+2y+z, 2x+y-z, -2x+z)$.

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

б) Испитати да ли је L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (1, 0, -1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^3$ који је генерисан векторима $e_1 = (3, 1, 5)$ и $e_2 = (2, 1, 3)$.
Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U као и угао који вектор v заклапа са потпростором U.

6. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,2,2,3)$ и $f_3 = (1,0,1,0)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.