

Linearna algebra i analitička geometrija, januar 2007.

1. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & - & y & + & z & + & w & = & 1 \\ x & - & 2y & - & z & + & 4w & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11w & = & 5 \end{array}$$

2. Ako je L linearno preslikavanje iz vektorskog prostora R^4 u vektorski prostor R^3 definisano sa $L(x, y, z, t) = (3x+y+5z+4t, 2x+y+2t, x+y-5z)$, odrediti rang, defekt i baze jezgra i slike datog preslikavanja L .

3. Neka je L linearni operator prostora $R^3[X]$ (prostor polinoma stepena manjeg od 3) zadat sa $L(p) = p' + 2p$.

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$.

b) Izračunati determinantu operatora L .

c) Ispitati da li je operator L invertibilan. Ako jeste odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice A .

b) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A .

c) Da li se matrica A može dijagonalizovati. Ako je odgovor potvrđan naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu B tako da važi $B = P^{-1}AP$.

5. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormiranu bazu podprostora W prostora R^4 generisanog vektorima $v_1 = (1, 3, 5, 1)$, $v_2 = (5, -1, -1, 3)$ i $v_3 = (1, 1, -1, -1)$.

6. Dat je vektorski prostor W rešenja sistema jednačina $\begin{array}{rccccrcr} 4x & + & 2y & - & 4z & + & 2w & = & 0 \\ 5x & + & y & - & 3z & + & 3w & = & 0 \end{array}$ u R^4 .

a) Naći bazu i dimenziju vektorskog prostora W .

b) Naći bazu i dimenziju vektorskog prostora W^\perp .

c) Odrediti rastojanje vektora $v = (2, 6, -2, 6)$ od vektorskog prostora W .

d) Odrediti ugao između vektora $v = (2, 6, -2, 6)$ i vektorskog prostora W .