Linearna algebra i analitička geometrija, januar 2008.

Zadaci

1. Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 & = & -7 \end{array}.$$

2. Neka je V_1 potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima (1,0,1,0) i (-2,1,-1,0), a V_2 potprostor generisan vektorima (0,1,1,1) i (-1,2,1,0). Naći bazu i dimenziju prostora $V_1 + V_2$ i $V_1 \bigcap V_2$.

3. Neka je $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ u $\mathbb{R}^3$ definisano sa
$L(x, y, z, t) = (2x + y + 3z + 6t, 3x + 4y + 2z + 9t, x + 6y - 4z + 3t)$.

a) Odrediti matricu preslikavanja L u odnosu na par kanonskih baza prostora $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$.

b) Odrediti rang, defekt i neke baze jezgra i slike datog preslikvanja L.

4. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice A.

b) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A.

c) Ispitati da li je matrica A dijagonalnog tipa i u slučaju da jeste naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu D tako da je $D = P^{-1}AP$.

5. Odrediti ortogonalnu projekciju i ortogonalnu dopunu vektora $v = (7, -4, -1, 2)$ na potprostor U vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ svih vektora (x_1, x_2, x_3, x_4) za koje je

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \end{array}$$

. Zatim izračunati rastojanje vektora v od potprostora U.

6. Data su tri vektora $f_1 = (1, 2, 2, -1)$, $f_2 = (1, 1, -5, 3)$ i $f_3 = (3, 2, 8, -7)$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$. Odrediti bar jedan ortonormiran sistem vektora $[e_1, e_2, e_3]$ za koji je $\Omega(e_1, e_2, e_3) = \Omega(f_1, f_2, f_3)$.

Teorija

1. Opisati skup rešenja sistema linearnih jednačina. Odrediti njegovu dimenziju.
2. Napisati Grassmann-ovu formulu, a zatim je dokazati.
3. Dokazati da su nule karakterističnog polinoma ortogonalne matrice po modulu jednake 1.