Linearna algebra i analitička geometrija, januar 2009.

1. Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & + & 2z & & & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & + & 3t & = & 8. \end{array}$$

2. Neka je U potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima
$u_1 = (1, 2, 1, 1)$
$u_2 = (2, 3, 1, 0)$
$u_3 = (3, 1, 1, -2)$, a V potprostor generisan vektorima
$v_1 = (1, 0, 3, 5)$
$v_2 = (1, 0, -2, -6)$
$v_3 = (0, 4, 1, 3)$.
Naći bazu i dimenziju za prostore U, V i $U + V$, a zatim izračunati i dimenziju prostora $U \bigcap V$.

3. Neka je $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ u $\mathbb{R}^3$ definisano sa
$L(x, y, z, t) = (x + y + z + t, 2x + 3y - z + t, 3x + 4y + 2t)$.

a) Odrediti matricu preslikavanja L u odnosu na par kanonskih baza prostora $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$.

b) Odrediti rang, defekt i neke baze jezgra i slike datog preslikvanja L.

4. Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.
Zatim odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A.
Ispitati da li je matrica A dijagonalnog tipa i u slučaju da jeste, naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu D tako da je $D = P^{-1}AP$.

5. Odrediti ortogonalnu projekciju i ortogonalnu dopunu vektora $v = (4, 0, 1, 1)$ na potprostor U vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ svih vektora (x, y, z, t) za koje je

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 2y & - & 3z & - & 2t & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & 0. \end{array}$$

Zatim izračunati rastojanje vektora v od potprostora U.

6. Neka je V potprostor prostora $\mathbb{R}^4$ koji je generisan vektorima
$f_1 = (0, 1, -1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0, 1)$ i $f_3 = (1, -1, 0, 0)$.
Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizacije odrediti ortonormiranu bazu za V.