Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, јануар 2011.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 5z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -3 \\ x & + & y & + & 3z & + & 4t & = & -3 \\ 2x & + & 3y & + & 11z & + & 12t & = & -5. \end{array}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1,\ 0,\ 1,\ 0) \\ u_2 & = & (-1,\ 2,\ 0,\ 1) \\ u_3 & = & (3,\ 2,\ 4,\ 1) \\ u_4 & = & (-4,\ 2,\ -3,\ 1), \end{array}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (0,\ 2,\ 1,\ 1) \\ v_2 & = & (0,\ 0,\ 1,\ 1). \end{array}$$

Наћи базу и димензију за просторе U, V, $U+V$ и $U\bigcap V$.

3. Нека је $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x,y,z)=(x-2y-3z, y+z, 2x-4y-5z)$.

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

б) Израчунати ранг и дефект оператора L.

в) Испитати да ли је L инвертибилан и у случају да јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на базу e.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D=P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v=(1,1,1,1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1=(1,-1,-1,-1)$ и $e_2=(-1,1,-1,-1)$.
Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U као и угао који вектор v заклапа са потпростором U.

6. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1=(1,2,0,3)$, $f_2=(4,0,5,8)$ и $f_3=(8,1,5,6)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V у односу на стандардни скаларни производ.