Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 24.1.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & + & 5t & + & s & = & 5 \\ & + & y & + & z & + & 2t & + & s & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & & + & 7t & + & s & = & 3. \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lcl} u_1 = (1, \ 2, \ 2, \ -1) & \qquad & v_1 = (2, \ 5, \ 0, \ -4) \\ u_2 = (3, \ 5, \ 10, \ -1) & & v_2 = (0, \ 2, \ -8, \ 3) \\ u_3 = (0, \ -1, \ 4, \ 2), & & v_3 = (2, \ 3, \ 8, \ -7). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, V, $U+V$ и $U \bigcap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(x, y, z, t) = (x - 2y + 3t, -3x + 6y + 2z - 11t, 2x - 4y + z + 5t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима
$f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2, 4)$ и $f_3 = (1, 2, -4, -3)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

6. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (3, 1, 5, 1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (3, 1, -1, 1)$ и $e_2 = (1, -1, 1, -1)$.
Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U.