Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, септембар 2009.

1. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ -3x & - & 5y & + & 3z & + & t & = & 2 \\ -x & - & y & - & z & + & 2t & = & 5. \end{array}$$

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1, \ -2, \ 1, \ 0) \\ u_2 & = & (2, \ -3, \ 0, \ 1) \\ u_3 & = & (3, \ -7, \ 5, \ -1), \end{array}$$

а V потпростор генерисан векторима

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (1, \ 2, \ -2, \ 1) \\ v_2 & = & (2, \ 2, \ -1, \ -1). \\ v_3 & = & (3, \ 1, \ -2, \ 0). \end{array}$$

Наћи базу и димензију за просторе U, V, $U+V$ и $U \bigcap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање векторског простора $\mathbb{R}^4$ у $\mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, 3x + 2y + 7z - 5t, 2x + 4y + 2t + 2t)$.

а) Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике датог пресликавања L.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и у случају да јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (-3, 2, 4)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^3$ који је генерисан векторима $e_1 = (-3, 0, 1)$ и $e_2 = (-1, 1, 0)$.
Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U.

6. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима
$f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, 2, 2)$ и $f_3 = (1, 3, -2, 2)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.