

## LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA, septembar '10

1. Rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned}2x + 7y + 3z + t &= 5 \\x + 3y + 5z - 2t &= 3 \\x + 5y - 9z + 8t &= 1 \\5x + 18y + 4z + 5t &= 12.\end{aligned}$$
2. Neka je  $U$  potprostor vektorskog prostora  $\mathbb{R}^4$  generisan vektorima:
$$\begin{aligned}u_1 &= (1, 2, -1, 0) \\u_2 &= (2, 5, 0, -1) \\u_3 &= (2, 3, -4, 1),\end{aligned}$$
a  $V$  potprostor generisan vektorima:
$$\begin{aligned}v_1 &= (1, 3, 1, -1) \\v_2 &= (1, 2, 3, 2) \\v_3 &= (2, 4, 6, -8).\end{aligned}$$
Odrediti bazu i dimenziju prostora  $U$ ,  $V$ ,  $U+V$ , i  $U \cap V$ .
3. Neka je  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linearni operator vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$  definisan sa
$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$
  - a) Odrediti matricu operatora  $T$  u odnosu na kanonsku bazu  $e$  prostora  $\mathbb{R}^3$
  - b) Ispitati da li je  $T$  invertibilan, i u slučaju da jeste odrediti formulu za  $T^{-1}$  takođe u odnosu na kanonsku bazu  $e$  prostora  $\mathbb{R}^3$ .
4. Data je matrica  $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & -5 \\ 11 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ .
  - a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice  $A$ .
  - b) Izračunati sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice  $A$ .
  - c) Ispitati da li je matrica  $A$  dijagonalnog tipa, i u slučaju da jeste izračunati  $A^n$ .
5. U Euklidskom vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^4$  sa standardnim skalarnim proizvodom dat je potprostor  $U$  generisan vektorima  $(2, 2, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 2, 1)$ , i  $(2, 1, -2, 1)$ . Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizacije odrediti ortonormiranu bazu za  $U$ .
6. Odrediti ortogonalnu projekciju i ortogonalnu dopunu vektora  $u = (1, 0, 1, 0)$  na potprostor  $V$  vektorskog prostora  $\mathbb{R}^4$  koji je generisan vektorima  $v_1 = (2, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, -1, 0, 2)$ , i  $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ . Zatim izračunati rastojanje vektora  $u$  od potprostora  $V$ .

