Linearna algebra B, prvi kolokvijum, 21.12.2008.

1. Neka je $V = \mathbb{R}^3[x]$ i preslikavanje $L : V \to V$ definisano sa
   $L(p) = 2p + (3x+1)p'$.

a) Dokazati da je L jedan linearni operator vektorskog prostora V.

b) Napisati matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu prostora V.

c) Da li je operator L inverzibilan?

d) Izračunati karakteristični i minimalni polinom operatora L.

e) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora L.

f) Ispitati da li je L dijagonalnog tipa. U slučaju da jeste, naći bazu prostora Vu kojoj L ima dijagonalnu matricu.

2. Dato je linearno preslikavanje $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3$ na sledeći način
   $L(p) = \big(p(0) + p'(1), p(1) + p'(3), p'(2) + \frac{1}{2}p''(0)\big)$.

a) Odrediti dimenzije i neke baze jezgra $KerL$ i slike ImL.

b) Naći matricu preslikavanja L u odnosu na par kanonskih baza prostora $\mathbb{R}^3[x]$ i $\mathbb{R}^3$, a zatim odrediti i bar jedan par baza ovih prostora u odnosu na koje preslikavanje L ima kanonsku matricu.

3. Dokazati da diferencna jednačina
   $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = (n^2 + 4n + 2)2^n$
   nad poljem $\mathbb{R}$ ima i neko rešenje oblika $(an^2 + bn + c)2^n$, a zatim odrediti i njeno opšte rešenje.

4. Neka je L linearni operator vektorskog prostora V za koji važi $L^2 = L$. Dokazati da postoje potprostori U i W vektorskog prostora V za koje važi $U \oplus W = V$ i za svako $u \in U$ i svako $w \in W$ je $L(u + w) = u$.

5. Izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}.$$