Линеарна алгебра Б, шк.г. 2009/2010.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ (четврти ток) - ЗАДАЦИ

12.04.2010.

1. Доказати да је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ дијагоналног типа и одредити дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}AP$.

2. Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 4 над пољем $\mathbb{R}$ одређен матрицом

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

у односу на неку базу $e = [e_1, e_2, e_3, e_4]$ тог простора.

(а) Одредити минимални полином оператора L. Да ли је оператор дијагоналан?

(б) Наћи матрицу оператора $G = L - 2I$ у односу на базу e. Да ли је оператор G нилпотентан?

(в) Одредити бар једну базу језгра линеарног оператора G и допунити је векторима u и v до базе целог простора V.

(г) Доказати да вектори $f_1 = G(u)$, $f_2 = u$, $f_3 = G(v)$, $f_4 = v$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања G у односу на базу f.

(д) Одредити матрицу B пресликавања L у односу на базу f као и бар једну инвертибилну матрицу P тако да је $B = P^{-1}AP$.

3(а) Познато је да је карактеристични полином матрице A једнак $\varphi_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)^4$, а минимални полином једнак $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^3$. Одредити Жорданову форму ове матрице.

(б) Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 10, при чему је $L^3 = 0$. Наћи Жорданову форму овог оператора (уколико овакав оператор постоји) ако је

(б.1) $\dim \operatorname{Ker} L^2 = 8$, $\dim \operatorname{Ker} L = 5$.

(б.2) $\dim \operatorname{Ker} L^2 = 7$, $\dim \operatorname{Ker} L = 5$.

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs.