Линеарна алгебра Б, Април 2010, Л смер *24. април 2010.*

1. Нека је $U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \middle| a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} \right\}$ и $W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^T \right\}$. Доказати да су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$. Наћи базе и димензије од U, W, $U \cap W$, $U + W$. Да ли је сума $U + W$ директна?

2. Дат је оператор $L : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4[x]$ дефинисан са $L(p) = p'(1)x + p(-1)x^2 + 2p'(x)$.

   а) Доказати да је L линеаран оператор.

   б) Одредити $\ker L$, $\operatorname{im} L$ њихове базе и димензије.

   в) Наћи матрицу оператора L у канонској бази e простора $\mathbb{R}^4[x]$.

   г) Наћи матрицу оператора L у бази $f = [x - 2, x^3 - 1, x^2 + 2x^3, 1 - 3x + x^2]$.

   д) За $q(x) = 2 + 2x - x^3$ одредити $L(q)$ у бази f.

3. Дата је матрица $A = \left(\begin{array}{rrr} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$.

   а) Одредити неку базу и димензију језгра $\ker(A + E)$ и слике $\operatorname{im}(A + E)$ матрице $A + E$.

   б) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A.

   в) Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици над пољем $\mathbb{R}$?

   г) Одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је матрица P^-1AP дијагонална.

   д) Наћи A^n, $n \geq 1$.

   ђ) Одредити бар једну матицу X за коју је $X^3 = A$.

4. Ако су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ сопствени вектори оператора L који одговарају различитим сопственим вредностима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, доказати да вектор $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ није сопствени вектор оператора L.

Линеарна алгебра Б, Април 2010, Л смер *24. април 2010.*

1. Нека је $U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \middle| a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} \right\}$ и $W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^T \right\}$. Доказати да су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$. Наћи базе и димензије од U, W, $U \cap W$, $U + W$. Да ли је сума $U + W$ директна?

2. Дат је оператор $L : \mathbb{R}^4[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4[x]$ дефинисан са $L(p) = p'(1)x + p(-1)x^2 + 2p'(x)$.

   а) Доказати да је L линеаран оператор.

   б) Одредити $\ker L$, $\operatorname{im} L$ њихове базе и димензије.

   в) Наћи матрицу оператора L у канонској бази e простора $\mathbb{R}^4[x]$.

   г) Наћи матрицу оператора L у бази $f = [x - 2, x^3 - 1, x^2 + 2x^3, 1 - 3x + x^2]$.

   д) За $q(x) = 2 + 2x - x^3$ одредити $L(q)$ у бази f.

3. Дата је матрица $A = \left(\begin{array}{rrr} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$.

   а) Одредити неку базу и димензију језгра $\ker(A + E)$ и слике $\operatorname{im}(A + E)$ матрице $A + E$.

   б) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A.

   в) Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици над пољем $\mathbb{R}$?

   г) Одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је матрица P^-1AP дијагонална.

   д) Наћи A^n, $n \geq 1$.

   ђ) Одредити бар једну матицу X за коју је $X^3 = A$.

4. Ако су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ сопствени вектори оператора L који одговарају различитим сопственим вредностима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, доказати да вектор $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ није сопствени вектор оператора L.