Линеарна алгебра Б, октобар 2 2009.

$\boxed{1}$ Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ и нека је линеарни оператор $L : V \to V$ дефинисан са

$$L(a + bx + cx^2) = b + (-4a + 4b)x + (-2a + b + 2c)x^2.$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора V.

б) Одредити минимални полином оператора L. Да ли је оператор L дијагоналан?

в) Да ли је оператор $G = L - 2I$ нилпотентан?

г) Одредити бар један вектор v тако да је $G(v) \neq 0$ и бар један вектор w из $KerG$ такав да је линеарно независан са $G(v)$.

д) Доказати да вектори $f_1 = G(v)$, $f_2 = v$ и $f_3 = w$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања G у односу на базу f.

ђ) Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу f.

$\boxed{2}$ Израчунати вредност детерминанте

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 1+x^2 \end{vmatrix}, \text{ за } x^2 \neq 1.$$

$\boxed{3}$ Дата је матрица $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

На векторском простору $V = M_2(\mathbb{R})$ дефинисано је пресликавање
$\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ на следећи начин $A \circ B = tr(A^T C B)$.

а) Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору V.

б) Одредити растојање вектора $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ од потпростора $U = \{A \in V : trA = 0\}$.

$\boxed{4}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$ са стандардним скаларним производом дефинисан са

$L(x, y, z) = (-4x + y - 2z, x - 4y - 2z, -2x - 2y - z)$.

а) Доказати да је оператор L симетричан.

б) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и одредити матрицу оператора L у нађеној бази f.

$\boxed{5}$ Нека су $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ сопствене вредности симетричног оператора $L : V \to V$, где је V n-димензионални еуклидски векторски простор и нека су $e_1, e_2, \cdots, e_k$ одговарајући сопствени вектори норме 1. Ако је $U = \Omega(e_1, e_2, \cdots, e_k)$, $k \leq n$, доказати да за свако $x \in U$ важи:
$\lambda_1(x, x) \leq (L(x), x) \leq \lambda_k(x, x)$.