Линеарна алгебра Б, Додатни рок 2010, III ток *29. септембар 2010.*

1. Нека је $U = \{p \in R^4[x] \mid p(1) = p'(1)\}$.
   а) Доказати да је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$.
   б) Одредити неку базу и димензију потпростора U.
   в) Одредити неку базу и димензију потпростора $W = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid p(x) = -p(-x)\}$.
   г) Да ли је сума потпростора U и W директна? Да ли је та сума једнака векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$?

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ пресликавање задато са $L(X) = \frac{1}{2}(X + X^T)$.
   а) Доказати да је L линеаран оператор.
   б) Одредити $\ker L$, $\operatorname{im} L$, њихове базе и димензије.
   в) Наћи матрицу оператора L у канонској бази e простора $\mathbb{R}^4[x]$.
   г) Наћи матрицу оператора L у бази $f = [x-2, x^3-1, x^2+2x^3, 1-3x+x^2]$.
   д) За $q(x) = 2 + 2x - x^3$ одредити $L(q)$ у бази f.

3. Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A.
   б) Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D над пољем $\mathbb{R}$?
   в) Одредити бар једну инверзибилну матрицу P и дијагоналну D за коју је $D = P^{-1}AP$.
   г) Наци A^n, $n \in N$.
   д) Одредити бар једну матрицу X за коју је $X^3 = A$.

4. Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеаран оператор векторског простора V димензије n такав да је $L^2 = 0$.
   а) Доказати да је $\operatorname{im} L \subseteq \ker L$.
   б) Доказати да је $\rho(L) \leq \frac{n}{2}$.
   в) Нека је U векторски потпростор од V такав да је $L(U) \subseteq U$ и да је $V = U + \operatorname{im} L$. Доказати да је тада $U = V$.

Линеарна алгебра Б, Додатни рок 2010, III ток *29. септембар 2010.*

1. Нека је $U = \{p \in R^4[x] \mid p(1) = p'(1)\}$.
   а) Доказати да је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$.
   б) Одредити неку базу и димензију потпростора U.
   в) Одредити неку базу и димензију потпростора $W = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid p(x) = -p(-x)\}$.
   г) Да ли је сума потпростора U и W директна? Да ли је та сума једнака векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$?

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ пресликавање задато са $L(X) = \frac{1}{2}(X + X^T)$.
   а) Доказати да је L линеаран оператор.
   б) Одредити $\ker L$, $\operatorname{im} L$, њихове базе и димензије.
   в) Наћи матрицу оператора L у канонској бази e простора $\mathbb{R}^4[x]$.
   г) Наћи матрицу оператора L у бази $f = [x-2, x^3-1, x^2+2x^3, 1-3x+x^2]$.
   д) За $q(x) = 2 + 2x - x^3$ одредити $L(q)$ у бази f.

3. Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице A.
   б) Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D над пољем $\mathbb{R}$?
   в) Одредити бар једну инверзибилну матрицу P и дијагоналну D за коју је $D = P^{-1}AP$.
   г) Наци A^n, $n \in N$.
   д) Одредити бар једну матрицу X за коју је $X^3 = A$.

4. Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеаран оператор векторског простора V димензије n такав да је $L^2 = 0$.
   а) Доказати да је $\operatorname{im} L \subseteq \ker L$.
   б) Доказати да је $\rho(L) \leq \frac{n}{2}$.
   в) Нека је U векторски потпростор од V такав да је $L(U) \subseteq U$ и да је $V = U + \operatorname{im} L$. Доказати да је тада $U = V$.