Линеарна алгебра Б 30. јун 2012.

1.а) Нека је дата матрица која зависи од реалног параметра λ са:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3\lambda & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

а) Одредити матрицу $\mathrm{adj}(A)$.
б) За које вредности параметра λ је матрица A инверзибилна?
в) За оне λ за које је то могуће наћи A^{-1}.
г) Нека је $X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ било која инверзибилна матрица. Да ли је $\mathrm{adj(X)}$ инверзибилна? Ако јесте, одредити инверз.
2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ задато са

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \circ (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = 2\alpha\alpha' + \beta\beta' - \alpha\gamma' - \alpha'\gamma + \gamma\gamma' + 3\delta\delta'.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између вектора $u = (1, 1, 1, -1)$ и $v = (1, 2, 2, 1)$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $(-3, -5, -6, 1)$ на потпростор $U \le \mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (1, 0, 1, -1)$ и $e_2 = (2, -1, 1, 0)$.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(a + bx + cx^2) = 2a - 2b + 2c + (-2a - b + 4c)x + (2a + 4b - c)x^2.$$

а) Доказати да је база $1, x, x^2$ векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ ортонормирана у односу на скаларни производ $\circ$:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$$

б) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3[x], \circ)$, где је $\circ$ наведени скаларни производ.
в) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

Линеарна алгебра Б 30. јун 2012.

1.а) Нека је дата матрица која зависи од реалног параметра λ са:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3\lambda & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

а) Одредити матрицу $\mathrm{adj}(A)$.
б) За које вредности параметра λ је матрица A инверзибилна?
в) За оне λ за које је то могуће наћи A^{-1}.
г) Нека је $X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ било која инверзибилна матрица. Да ли је $\mathrm{adj(X)}$ инверзибилна? Ако јесте, одредити инверз.
2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ задато са

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \circ (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = 2\alpha\alpha' + \beta\beta' - \alpha\gamma' - \alpha'\gamma + \gamma\gamma' + 3\delta\delta'.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између вектора $u = (1, 1, 1, -1)$ и $v = (1, 2, 2, 1)$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $(-3, -5, -6, 1)$ на потпростор $U \le \mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (1, 0, 1, -1)$ и $e_2 = (2, -1, 1, 0)$.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(a + bx + cx^2) = 2a - 2b + 2c + (-2a - b + 4c)x + (2a + 4b - c)x^2.$$

а) Доказати да је база $1, x, x^2$ векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$ ортонормирана у односу на скаларни производ $\circ$:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$$

б) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3[x], \circ)$, где је $\circ$ наведени скаларни производ.
в) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.