Линеарна алгебра Б
група 103

20.06.2013.

А Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Б На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ са

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(-3)q(-3).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

2° Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] : p(2) - p(1) = p'(1)\}$, одредити бар једну ортонормирану базу простора U као и димензију простора $U^\perp$.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $r(X) = 2 + 19X + 7X^2$ на потпростор U, а затим и бар једну базу простора $U^\perp$.

В Нека је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са

$$L(x, y, z) = (-x + 2y + (3 - c)z, (c + 1)x - y + 2z, 2x + 2y - z), \text{ где је } c \in \mathbb{R}.$$

1° Доказати да је L симетричан оператор еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$ са стандардним скаларним производом ако и само ако је $c = 1$.

2° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и одредити матрицу оператора L у нађеној бази.

Г Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор коначно димензионог векторског простора V такав да постоји не-нула вектор v са особином да је $L^3(v) = L(v)$. Доказати да је тада бар један од скалара 0, 1 и -1 сопствена вредност оператора L.

Линеарна алгебра Б
група 103

20.06.2013.

А Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Б На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ са

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(-3)q(-3).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

2° Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] : p(2) - p(1) = p'(1)\}$, одредити бар једну ортонормирану базу простора U као и димензију простора $U^\perp$.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $r(X) = 2 + 19X + 7X^2$ на потпростор U, а затим и бар једну базу простора $U^\perp$.

В Нека је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са

$$L(x, y, z) = (-x + 2y + (3 - c)z, (c + 1)x - y + 2z, 2x + 2y - z), \text{ где је } c \in \mathbb{R}.$$

1° Доказати да је L симетричан оператор еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$ са стандардним скаларним производом ако и само ако је $c = 1$.

2° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и одредити матрицу оператора L у нађеној бази.

Г Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор коначно димензионог векторског простора V такав да постоји не-нула вектор v са особином да је $L^3(v) = L(v)$. Доказати да је тада бар један од скалара 0, 1 и -1 сопствена вредност оператора L.