Линеарна алгебра Б
група 103

29.06.2015.

1. Израчунати детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ дефинисан са

$$L(X) = CXC, \text{ где је } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

а) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

в) Испитати да ли је L дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

3. а) Доказати да је са

$$p \circ q = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + \frac{1}{4}p''q''$$

дефинисан скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[X]$ у односу на овај скаларни производ.

в) Одредити растојање вектора $2+3X-X^2$ од потпростора $U = \Omega(e_1, e_2)$, где је $e_1 = X + X^2$, $e_2 = 1 - X^2$.

4. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

а) Одредити бар једну ортогоналну матрицу P тако да је матрица P^TAP дијагонална.

б) Користећи адјунговану матрицу одредити инверз матрице A.

в) Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра Б
група 103

29.06.2015.

1. Израчунати детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 1+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ дефинисан са

$$L(X) = CXC, \text{ где је } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

а) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

в) Испитати да ли је L дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

3. а) Доказати да је са

$$p \circ q = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + \frac{1}{4}p''q''$$

дефинисан скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[X]$ у односу на овај скаларни производ.

в) Одредити растојање вектора $2+3X-X^2$ од потпростора $U = \Omega(e_1, e_2)$, где је $e_1 = X + X^2$, $e_2 = 1 - X^2$.

4. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

а) Одредити бар једну ортогоналну матрицу P тако да је матрица P^TAP дијагонална.

б) Користећи адјунговану матрицу одредити инверз матрице A.

в) Наћи A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Све одговоре детаљно образложити