Линеарна алгебра Б, 23.6.2010.

$\boxed{\text{А}}$ Одредити карактеристични полином матрице

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = 2p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 3p(1)q(1).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

2° Ако је U потпростор простора $\mathbb{R}^3[x]$ генерисан векторима $1-x$ и x^2-2x, наћи бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на задат скаларни производ.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора
$p(x) = 7 - 2x - 10x^2$
на потпростор U, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1° Доказати да матрице A и A^T имају исте сопствене вредности.

2° Ако су A, B реалне симетричне матрице, доказати да матрице AB и BA имају исте сопствене вредности.

Линеарна алгебра Б, 23.6.2010.

$\boxed{\text{А}}$ Одредити карактеристични полином матрице

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = 2p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 3p(1)q(1).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

2° Ако је U потпростор простора $\mathbb{R}^3[x]$ генерисан векторима $1-x$ и x^2-2x, наћи бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на задат скаларни производ.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора
$p(x) = 7 - 2x - 10x^2$
на потпростор U, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1° Доказати да матрице A и A^T имају исте сопствене вредности.

2° Ако су A, B реалне симетричне матрице, доказати да матрице AB и BA имају исте сопствене вредности.