Линеарна алгебра Б, 9. јун 2012.
трећи ток

А Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 3 над пољем $\mathbb{R}$ одређен својом матрицом

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

у односу на неку фиксирану базу $e = [e_1, e_2, e_3]$ тог простора.

1° Одредити карактеристични полином оператора L и његове сопствене вредности.

2° Доказати да је $A^2 \neq O$ и одредити бар један вектор a из базе $e = [e_1, e_2, e_3]$ такав да је $L^2(a) \neq 0$.

3° Ако је $f_1 = L^2(a)$, $f_2 = L(a)$ и $f_3 = a$, доказати да је $f = [f_1, f_2, f_3]$ база простора V и одредити матрицу оператора L у односу на базу f.

Б Нека је V еуклидски векторски простор $\mathbb{R}^4$ и U његов потпростор свих вектора $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ за које важи:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0. \end{array}$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$.

2° Ако је $v = (1, 2, 3, 4)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора v на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^\perp$. Ком простору је вектор v ближи?

В На векторском простору $V = \mathbb{R}^3[X]$ дефинисано је пресликавање $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору V, а затим и да је канонска база $e = [1, X, X^2]$ простора V и једна ортонормирана база у односу на дати скаларни производ.

2° За линеарни оператор L векторског простора V задат са

$$L(p) = 2(1 + X + X^2) \cdot p(1) - 3 \cdot p(X)$$

одредити његову матрицу у односу на базу e, а затим доказати да је L један симетричан оператор у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора V у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

Г Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инверзибилна матрица реда n.

1° Доказати да је $\det(\mathrm{adjA}) = (\det\mathrm{A})^{\mathrm{n}-1}$.

2° Ако је $A^T = \mathrm{adj(A)}$, испитати да ли је матрица A ортогонална. Да ли је ортогонална ако је n непаран број?

Линеарна алгебра Б, 9. јун 2012.
трећи ток

А Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 3 над пољем $\mathbb{R}$ одређен својом матрицом

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

у односу на неку фиксирану базу $e = [e_1, e_2, e_3]$ тог простора.

1° Одредити карактеристични полином оператора L и његове сопствене вредности.

2° Доказати да је $A^2 \neq O$ и одредити бар један вектор a из базе $e = [e_1, e_2, e_3]$ такав да је $L^2(a) \neq 0$.

3° Ако је $f_1 = L^2(a)$, $f_2 = L(a)$ и $f_3 = a$, доказати да је $f = [f_1, f_2, f_3]$ база простора V и одредити матрицу оператора L у односу на базу f.

Б Нека је V еуклидски векторски простор $\mathbb{R}^4$ и U његов потпростор свих вектора $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ за које важи:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0. \end{array}$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$.

2° Ако је $v = (1, 2, 3, 4)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора v на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^\perp$. Ком простору је вектор v ближи?

В На векторском простору $V = \mathbb{R}^3[X]$ дефинисано је пресликавање $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору V, а затим и да је канонска база $e = [1, X, X^2]$ простора V и једна ортонормирана база у односу на дати скаларни производ.

2° За линеарни оператор L векторског простора V задат са

$$L(p) = 2(1 + X + X^2) \cdot p(1) - 3 \cdot p(X)$$

одредити његову матрицу у односу на базу e, а затим доказати да је L један симетричан оператор у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора V у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

Г Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инверзибилна матрица реда n.

1° Доказати да је $\det(\mathrm{adjA}) = (\det\mathrm{A})^{\mathrm{n}-1}$.

2° Ако је $A^T = \mathrm{adj(A)}$, испитати да ли је матрица A ортогонална. Да ли је ортогонална ако је n непаран број?