Линеарна алгебра Б 9. јун 2012.

1.а) Да ли је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

слична Жордановој матрици? Ако јесте, одредити њену Жорданову канонску форму.
б) Наћи све могуће Жорданове канонске форме за линеарни оператор $L : V \to V$ чији је карактеристични полином $\varphi_L(x) = -(x-6)^4(x-7)$.
2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ задато са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између полинома $p(x) = x^2 - x - 2$ и $q(x) = x^2 - 2x$.
в) Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p'(0) + p''(0) = 0\}$ потпростор датог векторског простора. Одредити неку базу за $U^\perp$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $r(x) = -x^2 + 3$ на потпростор U.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор дефинисан са

$$L((x,y,z)) = (7x + y - 2z, x + 7x - 2z, -2x - 2y + 10z).$$

а) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3, \circ)$, где је $\circ$ стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.
б) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази. (Помоћ: највећа сопствена вредност је по апсолутној вредности између 10 и 15.)

Линеарна алгебра Б 9. јун 2012.

1.а) Да ли је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

слична Жордановој матрици? Ако јесте, одредити њену Жорданову канонску форму.
б) Наћи све могуће Жорданове канонске форме за линеарни оператор $L : V \to V$ чији је карактеристични полином $\varphi_L(x) = -(x-6)^4(x-7)$.
2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ задато са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између полинома $p(x) = x^2 - x - 2$ и $q(x) = x^2 - 2x$.
в) Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid p'(0) + p''(0) = 0\}$ потпростор датог векторског простора. Одредити неку базу за $U^\perp$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $r(x) = -x^2 + 3$ на потпростор U.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор дефинисан са

$$L((x,y,z)) = (7x + y - 2z, x + 7x - 2z, -2x - 2y + 10z).$$

а) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3, \circ)$, где је $\circ$ стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.
б) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази. (Помоћ: највећа сопствена вредност је по апсолутној вредности између 10 и 15.)