Линеарна алгебра Б
група 103

08.06.2013.

$\boxed{\text{А}}$ Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} - y_{n-2} & \dots & x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $V = \mathbb{R}^4$ дато је пресликавање $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ са

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_4 y_4.$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору V.

2° Ако је U скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & - & 7t & = & 0, \end{array}$$

одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1, -1, -3, 3)$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^\perp$. Ком простору је вектор v ближи?

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 2xz - 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

3° Написати формуле трансформације координата.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $L, G : V \to V$ линеарни оператори векторског простора V такви да је $L^2 = G^2$ и $KerL \cap KerG = \{0\}$.

1° Доказати да је $L(KerG) \subseteq KerL$.

2° Доказати да је $dim(L(KerG)) = dim(KerG)$.

Линеарна алгебра Б
група 103

08.06.2013.

$\boxed{\text{А}}$ Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} - y_{n-2} & \dots & x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $V = \mathbb{R}^4$ дато је пресликавање $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ са

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_4 y_4.$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору V.

2° Ако је U скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & - & 7t & = & 0, \end{array}$$

одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1, -1, -3, 3)$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^\perp$. Ком простору је вектор v ближи?

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 2xz - 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

3° Написати формуле трансформације координата.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $L, G : V \to V$ линеарни оператори векторског простора V такви да је $L^2 = G^2$ и $KerL \cap KerG = \{0\}$.

1° Доказати да је $L(KerG) \subseteq KerL$.

2° Доказати да је $dim(L(KerG)) = dim(KerG)$.