# Линеарна алгебра Б
# група 103

**19.06.2015.**

$\boxed{1}$ Ако је $x \neq k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$, израчунати детерминанту реда $n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{sinx} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{sinx} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{sinx} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{sinx} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{sinx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{sinx} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{sinx} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$ дефинисан са

$$L(p) = -3p + p(1) \cdot (1 + X + X^2)$$

а) Наћи матрицу $A$ линеарног оператора $L$ у односу на канонску базу $e$ простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора $L$.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора $L$.

в) Испитати да ли је $L$ дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу $f$ простора $\mathbb{R}^3[X]$ у којој $L$ има дијагоналну матрицу $D$.

$\boxed{3}$ На векторском простору $\mathbb{R}^4$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$x \circ y = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4$.

б) Нека је $U$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (2, 0, 1, 1)$ и $e_2 = (-2, 1, 2, -1)$. Одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

в) Ако је $v = (0, 4, 3, 4)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $v$ на потпростор $U$, а затим и растојање вектора $v$ од потпростора $U$ и од потпростора $U^\perp$. Којем потпростору је вектор $v$ ближи?

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора $V$ и нека је дата квадратна форма $\Phi$ на $V$ на следећи начин:

$$\Phi(v) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4xz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $V$ у којој форма $\Phi$ има канонски облик.

б) Изразити $\Phi$ преко координата $x'$, $y'$, $z'$ у новој бази $f$.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детально образложити


# Линеарна алгебра Б
# група 103

**19.06.2015.**

$\boxed{1}$ Ако је $x \neq k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$, израчунати детерминанту реда $n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{sinx} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{sinx} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{sinx} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{sinx} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{sinx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{sinx} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{sinx} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$ дефинисан са

$$L(p) = -3p + p(1) \cdot (1 + X + X^2)$$

а) Наћи матрицу $A$ линеарног оператора $L$ у односу на канонску базу $e$ простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора $L$.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора $L$.

в) Испитати да ли је $L$ дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу $f$ простора $\mathbb{R}^3[X]$ у којој $L$ има дијагоналну матрицу $D$.

$\boxed{3}$ На векторском простору $\mathbb{R}^4$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$x \circ y = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4$.

б) Нека је $U$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $e_1 = (2, 0, 1, 1)$ и $e_2 = (-2, 1, 2, -1)$. Одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

в) Ако је $v = (0, 4, 3, 4)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $v$ на потпростор $U$, а затим и растојање вектора $v$ од потпростора $U$ и од потпростора $U^\perp$. Којем потпростору је вектор $v$ ближи?

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора $V$ и нека је дата квадратна форма $\Phi$ на $V$ на следећи начин:

$$\Phi(v) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4xz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $V$ у којој форма $\Phi$ има канонски облик.

б) Изразити $\Phi$ преко координата $x'$, $y'$, $z'$ у новој бази $f$.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детально образложити