Колоквијум из Линеарне алгебре Б 12. мај 2012.

1. Израчунати детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & \dots & 0 & 6 & 6 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & n-2 & n-2 \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & n & n & n & \dots & n & n & 2n \end{vmatrix}$$

2. (а) Крамеровом методом решити систем линеарних једначина у зависности од $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (a+1)z & = & a+1 \\ x & - & y & + & (a-1)z & = & a \\ ax & + & 2y & + & (a+2)z & = & 2a+1. \end{array}$$

(б) Навести Крамерову теорему.

3. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -10 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Да ли је матрица A слична дијагоналној матрици? Ако јесте, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да $D = P^{-1}AP$.

4. Нека је V коначно димензиони векторски простор над пољем F и L линеарни оператор тог простора. Ако је μ минимални полином оператора L и f и g полиноми над F, доказати:
(а) Ако је $\mu(x) = f(x) \cdot g(x)$ онда је $\mathrm{Im}(g(\mathrm{L})) \subseteq \mathrm{Ker}(f(\mathrm{L}))$.
(б) Ако су f и g узајамно прости и $\mu(x) = f(x) \cdot g(x)$, онда $\mathrm{Im}(g(\mathrm{L})) = \mathrm{Ker}(f(\mathrm{L}))$.

ТЕОРИЈА:

5. (а) Дефинисати сопствене вредности и сопствене векторе линеарног оператора.
(б) Доказати да је $\alpha \in F$ сопствена вредност линеарног оператора ако и само ако је нула његовог минималног полинома.

6. Нека је V векторски простор димензије 4 над пољем F и $\mathrm{L} : V \to V$ нилпотентан оператор ранга 2.
(а) Одредити Жорданову матрицу оператора L, ако $\mathrm{L}^2 = 0$.
(б) Одредити Жорданову матрицу оператора L, ако $\mathrm{L}^2 \neq 0$.
(ц) Да ли је $\mathrm{L}^3 = 0$?

7. Дефинисати линеарни омотач над скупом. Шта је по структури скуп решења хомогеног система линеарних једначина?