Линеарна алгебра Б, други ток *13.09.2010.*

$\boxed{\text{А}}$ Израчунати детерминанту реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(-\frac{1}{2})q'(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}p''(0)q''(0).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

2° Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[X]$ у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи ортогоналну пројекцију вектора $p(x) = 3X + 2X^2$ на потпростор U који је генерисан векторима $1+X$ и $X+X^2$, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz + 6yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V. Ако је λ^2 сопствена вредност оператора L^2, доказати да је тада λ или $-\lambda$ сопствена вредност оператора L.

Линеарна алгебра Б, други ток *13.09.2010.*

$\boxed{\text{А}}$ Израчунати детерминанту реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(-\frac{1}{2})q'(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}p''(0)q''(0).$$

1° Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

2° Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3[X]$ у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи ортогоналну пројекцију вектора $p(x) = 3X + 2X^2$ на потпростор U који је генерисан векторима $1+X$ и $X+X^2$, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz + 6yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V. Ако је λ^2 сопствена вредност оператора L^2, доказати да је тада λ или $-\lambda$ сопствена вредност оператора L.