Линеарна алгебра Б, други ток **24. септембар 2011.**

$\boxed{1}$ Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(-\frac{1}{2})q'(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}p''q''.$$

а) Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Ако је $U = \Omega(X^2)$, одредити по једну ортонормирану базу простора U и $U^\perp$.

в) Одредити све вредности скалара α за које је $d(\alpha X^2 + X + 2, U^\perp) = 1$.

$\boxed{3}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати одговарајуће формуле трансформације координата.

$\boxed{4}$ Нека је $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ јединични вектор из $\mathbb{R}^n$ и нека је $A = E - x \cdot x^T$. Доказати да је матрица A симетрична и да је вектор x њен сопствени вектор.
Која му сопствена вредност одговара?
Ако је y не-нула вектор ортогоналан на вектор x, доказати да је y такође сопствени вектор матрице A.