Линеарна алгебра Б 7. октобар 2012.

1. Израчунати детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ задато са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између полинома $p(x) = x - 1$ и $q(x) = -1$.
в) Нека је $U = \mathcal{L}(1 + x, 2 - x + x^2)$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$. Одредити неку базу за $U^\perp$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $r(x) = -6x^2 - x + 10$ на потпросторе U и $U^\perp$.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарни оператор дефинисан са $L(p) = 2p(1)(1 + x + x^2) - p$.
а) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3[x], \circ)$, где је $\circ$ скаларни производ задат са $p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''$.
б) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

Линеарна алгебра Б 7. октобар 2012.

1. Израчунати детерминанту:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

2. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ задато са

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
б) Одредити угао између полинома $p(x) = x - 1$ и $q(x) = -1$.
в) Нека је $U = \mathcal{L}(1 + x, 2 - x + x^2)$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$. Одредити неку базу за $U^\perp$.
г) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $r(x) = -6x^2 - x + 10$ на потпросторе U и $U^\perp$.
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ линеарни оператор дефинисан са $L(p) = 2p(1)(1 + x + x^2) - p$.
а) Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3[x], \circ)$, где је $\circ$ скаларни производ задат са $p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''$.
б) Наћи бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.