Linearna algebra B, 12.9.2008.

Zadaci

1*. Neka je vektorski prostor V direktna suma potprostora U i W, tj. $V = U \oplus W$.
Dokazati da postoji linearni operator $L : V \to V$ vektorskog prostora V takav da je jezgro $KerL = U$, a slika $ImL = W$.

2. Neka je preslikavanje $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dato sa $L(X) = X^T C$, gde je

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Dokazati da je L linearni operator vektorskog prostora $M_2(\mathbb{R})$ i naći njegovu matricu u odnosu na kanonsku bazu prostora $M_2(\mathbb{R})$.

b) Odrediti jezgro i rang operatora L.
Da li je L injektivan?

c) Odrediti karakteristični i minimalni polinom operatora L.
Ispitati da li je L dijagonalnog tipa.

3. Neka je linearni operator $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisan na sledeći način:

$$L(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 5y - z, -y + 2z).$$

a) Dokazati da je L simetričan linearni operator euklidskog vektorskog prostora $(\mathbb{R}^3, \circ)$, gde je $\circ$ standardni skalarni proizvod.

b) Naći bar jednu ortonormiranu bazu $e = [e_1, e_2, e_3]$ prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj operator L ima dijagonalnu matricu.

4. Neka je V euklidski vektorski prostor $\mathbb{R}^4$ i U njegov potprostor svih vektora $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ za koje važi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 3z & - & 2t & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & 0. \end{array}$$

Odrediti rastojanje vektora $v = (4, 0, 1, 1)$ od potprostora U.

Teorija

1. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori
2. Ortogonalnost. Ortogonalni komplement. Ortogonalna projekcija
2. Simetrični operatori euklidskih vektorskih prostora