Линеарна алгебра Б, септембар 2009.

$\boxed{1}$ Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ и нека је линеарни оператор $L : V \to V$ дефинисан са

$$L(a + bx + cx^2) = (a + 2b - 3c) + (-2a + 6b - 6c)x + (-a + 2b - c)x^2.$$

а) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора V.

б) Одредити минимални полином оператора L. Да ли је оператор L дијагоналан?

в) Да ли је оператор $G = L - 2I$ нилпотентан?

г) Одредити бар један вектор v тако да је $G(v) \neq 0$ и бар један вектор w из $KerG$ такав да је линеарно независан са $G(v)$.

д) Доказати да вектори $f_1 = G(v)$, $f_2 = v$ и $f_3 = w$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања G у односу на базу f.

ђ) Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу f.

$\boxed{2}$ Израчунати вредност детерминанте

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, n \geq 2.$$

$\boxed{3}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити растојање вектора $p(x) = -2x^2 - 2x$ од потпростора U генерисаног векторима $e_1 = 1 - x$ и $e_2 = x^2 - 2$.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Q на V на следећи начин:

$$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8xy + 4xz - 4yz.$$

Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Q има канонски облик и изразити Q преко координата x', y', z' у новој бази f.