Линеарна алгебра Б, други ток *01.09.2010.*

$\boxed{\text{А}}$ Израчунати детерминанту реда $n+1$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^4$ дат је скаларни производ

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$

Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (4, -4, 2, 2)$ на потпростор U који је генерисан векторима $e_1 = (0, -1, -1, 1)$ и $e_2 = (1, 0, -1, -1)$, а затим и растојање вектора v од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је на векторком простору $V = \mathbb{R}^3[X]$ задат скаларни производ

$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$

1° Доказати да је канонска база $e = [1, X, X^2]$ простора V и једна ортонормирана база у односу на дати скаларни производ.

2° За линеарни оператор L векторског простора V задат са

$L(p) = 2(1 + X + X^2) \cdot p(1) - 2 \cdot p(X)$

одредити његову матрицу у односу на базу e, а затим доказати да је L један симетричан оператор у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора V у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V димензије n такав да је $L^2 = 0$.

1° Доказати да је $ImL \subseteq KerL$.

2° Доказати да је $\rho(L) \leq \frac{n}{2}$.

3° Нека је U векторски потпростор од V такав да је $L(U) \subseteq U$ и да је $V = U + ImL$. Доказати да је тада $U = V$.

Линеарна алгебра Б, други ток *01.09.2010.*

$\boxed{\text{А}}$ Израчунати детерминанту реда $n+1$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ На векторском простору $\mathbb{R}^4$ дат је скаларни производ

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$

Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (4, -4, 2, 2)$ на потпростор U који је генерисан векторима $e_1 = (0, -1, -1, 1)$ и $e_2 = (1, 0, -1, -1)$, а затим и растојање вектора v од потпростора U.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је на векторком простору $V = \mathbb{R}^3[X]$ задат скаларни производ

$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''q''.$

1° Доказати да је канонска база $e = [1, X, X^2]$ простора V и једна ортонормирана база у односу на дати скаларни производ.

2° За линеарни оператор L векторског простора V задат са

$L(p) = 2(1 + X + X^2) \cdot p(1) - 2 \cdot p(X)$

одредити његову матрицу у односу на базу e, а затим доказати да је L један симетричан оператор у односу на дати скаларни производ.

3° Наћи бар једну ортонормирану базу f простора V у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V димензије n такав да је $L^2 = 0$.

1° Доказати да је $ImL \subseteq KerL$.

2° Доказати да је $\rho(L) \leq \frac{n}{2}$.

3° Нека је U векторски потпростор од V такав да је $L(U) \subseteq U$ и да је $V = U + ImL$. Доказати да је тада $U = V$.