Линеарна алгебра Б
група 103

16.09.2015.

$\boxed{1}$ Израчунати детерминанте реда n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Дати су вектори $f_1 = 1 + X + X^2 + X^3$ и $f_2 = -1 + X - X^2 + X^3$ из векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$. Нека је $L : \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}^4[X]$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$ дефинисан са

$$L(p) = \frac{1}{2} \cdot p(1) \cdot f_1 + \frac{1}{2} \cdot p(-1) \cdot f_2.$$

а) Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

б) Доказати да су f_1 и f_2 сопствени вектори оператора L који одговарају редом сопственим вредностима 2 и -2.

в) Испитати да ли је L дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^4[X]$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

а) Доказати да је са $X \circ Y = tr(X^T AY)$ дефинисан скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Ако је U скуп свих матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом A, одредити бар једну ортонормирану базу простора $U^\perp$ у односу на овај скаларни производ.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ на потпростор U, а затим и растојање вектора B од потпростора U у односу на дати скаларни производ.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz - 6yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детально образложити

Линеарна алгебра Б
група 103

16.09.2015.

$\boxed{1}$ Израчунати детерминанте реда n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Дати су вектори $f_1 = 1 + X + X^2 + X^3$ и $f_2 = -1 + X - X^2 + X^3$ из векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$. Нека је $L : \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}^4[X]$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$ дефинисан са

$$L(p) = \frac{1}{2} \cdot p(1) \cdot f_1 + \frac{1}{2} \cdot p(-1) \cdot f_2.$$

а) Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

б) Доказати да су f_1 и f_2 сопствени вектори оператора L који одговарају редом сопственим вредностима 2 и -2.

в) Испитати да ли је L дијагоналног типа. У случају да јесте, наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^4[X]$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

а) Доказати да је са $X \circ Y = tr(X^T AY)$ дефинисан скаларни производ на векторском простору $M_2(\mathbb{R})$.

б) Ако је U скуп свих матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом A, одредити бар једну ортонормирану базу простора $U^\perp$ у односу на овај скаларни производ.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ на потпростор U, а затим и растојање вектора B од потпростора U у односу на дати скаларни производ.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz - 6yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детально образложити