Математичка логика у рачунарству, Јануар 2015. *24. јануар 2015.*

1. Нека је T теорија група експонента 2 на језику $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$, тј. $T = T_{Grp} \cup \{\forall x(x \cdot x = e)\}$. Природном дедукцијом доказати: $T \vdash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$.

Решење.

1.	$T \vdash \forall xyz((xy)z = x(yz))$	аксиома
2.	$T \vdash \forall x(xx^{-1} = e)$	аксиома
3.	$T \vdash \forall x(x^{-1}x = e)$	аксиома
4.	$T \vdash \forall x(xe = x)$	аксиома
5.	$T \vdash \forall x(ex = x)$	аксиома
6.	$T \vdash \forall x(xx = e)$	аксиома
7.	$T \vdash (xy)(xy) = e$	$\forall_E$ из 6.
8.	$T \vdash (xy)(xy) = ((xy)x)y$	$\forall_E$ из 1. (три пута)
9.	$T \vdash ((xy)x)y = e$	$=_E$ из 8. на 7.
10.	$T \vdash (((xy)x)y)y = (((xy)x)y)y$	$=_U$
11.	$T \vdash (((xy)x)y)y = ey$	$=_E$ из 9. на 10.
12.	$T \vdash ey = y$	$\forall_E$ из 5.
13.	$T \vdash (((xy)x)y)y = y$	$=_E$ из 12. на 11.
14.	$T \vdash (((xy)x)y)y = ((xy)x)(yy)$	$\forall_E$ из 1. (три пута)
15.	$T \vdash ((xy)x)(yy) = y$	$=_E$ из 14. на 13.
16.	$T \vdash yy = e$	$\forall_E$ из 6.
17.	$T \vdash ((xy)x)e = y$	$=_E$ из 16. на 15.
18.	$T \vdash ((xy)x)e = (xy)x$	$\forall_E$ из 4.
19.	$T \vdash (xy)x = y$	$=_E$ из 18. на 17.
20.	$T \vdash ((xy)x)x = ((xy)x)x$	$=_U$
21.	$T \vdash ((xy)x)x = yx$	$=_E$ из 19. на 20.
22.	$T \vdash ((xy)x)x = (xy)(xx)$	$\forall_E$ из 1.
23.	$T \vdash (xy)(xx) = yx$	$=_E$ из 22. на 21.
24.	$T \vdash xx = e$	$\forall_E$ из 6.
25.	$T \vdash (xy)e = yx$	$=_E$ из 24. на 23.
26.	$(xy)e = xy$	$\forall_E$ из. 4.
27.	$T \vdash xy = yx$	$=_E$ из 26. на 25.
28.	$T \vdash \forall xy(xy = yx)$	$\forall_U$ на 27. (два пута)

$\dashv$

2. Дати пример теорије T на неком језику за коју је $\mathrm{fs}(T) = \{4n \mid n \geq 1\}$.

Решење. Једно решење је да на језику $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ посматрамо теорију T коју чине аксиоме групе и аксиома која каже да група има елемент реда 4: $\exists x(x \neq e \wedge xx \neq e \wedge xxxx = e)$. Ако је $\mathbb{M} \models T$ коначан модел, тада је $\mathbb{M}$ коначна група која има елемент реда 4. По Лагранжовој теореми ред елемента дели ред групе, па $4 \mid |\mathbb{M}|$. Са друге стране, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ је модел теорије T, па закључујемо да је $\mathrm{fs}(T) = \{4n \mid n \geq 1\}$.

Друго решење је да на језику $\mathcal{L} = \{E\}$ посматрамо теорију T коју чине аксиоме релације еквиваленције и аксиома која каже да је свака E-класа четворочлана:

$$\forall x \exists y_1 y_2 y_3 y_4 (\bigwedge_{1 \leq i \leq 4} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} y_i \neq y_j \wedge \forall z(E(x,z) \Rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq 4} z = y_i)).$$

Ако је $\mathbb{M} \models T$ коначан модел, тада је E еквиваленција која има n класа и свака од њих је четворочлана, па $|\mathbb{M}| = 4n$. Лако је дефинсати на скупу са $4n$ елемената модел теорије T. Дакле, $\mathrm{fs}(T) = \{4n \mid n \geq 1\}$.$\dashv$

3. Кажемо да је група *торзиона* ако су сви њени елементи коначног реда. Доказати да класа $\mathcal{K}$ торзионих група није аксиоматизабилна.

Решење. Нека је $\mathcal{L}$ језик група, T_{Grp} теорија група на $\mathcal{L}$. Претпоставимо супротно да T аксиоматизује класу торзионих група. Посматрајмо проширени језик $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ и проширену теорију $T' = T \cup \{\underbrace{cc\ldots c}_{n} \neq e \mid n \geq 1\}$. Теорија T' не може имати модел, јер би он морао да буде торзиона група, док је интерпретација симбола c елемент бесконачног реда. По теореми компактности неки коначан подскуп

$T_0' \subseteq T'$ нема модел, па ни $T_0 = T \cup T_0'$ нема модел. Теорија T_0 садржи аксиоме класе торзионих група, као и коначно много реченица облика $cc \dots c \neq e$. Нека је $N > \max\{n \mid \underbrace{cc \dots c}_{n} \neq e \in T_0\}$. Посматрајмо модел језика $\mathcal{L}'$: $\mathbb{M} = (\mathrm{Z}_N, +_N, 0, c^{\mathbb{M}} = 1)$. $\mathbb{M}$ је торзиона група и интерпретација од c је елемент реда N, па је $\mathbb{M} \models T_0$. Контрадикција. $\dashv$

4. Нека је $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [2n, 2n+1]$ и $\mathbb{A} = (A, <)$ модел, где је $<$ уобичајено уређење реалних бројева. Доказати:

(1) скупови $[0,1]$ и $[2,3]$ су $\emptyset$-дефинабилни; **(2)** $\mathrm{dcl}(\emptyset) \supseteq \mathbf{N}$. Одредити $\mathrm{dcl}(\emptyset)$.

Решење. **(1)** Уочимо формулу $\pi(x)$ која каже "x има непосредног претходника":

$$\pi(x) = \exists y\, [y < x \wedge \forall z\, (z < x \Rightarrow z \leq y)]^1.$$

Јасно је $\pi(A) = \{2n \mid n \geq 1\}$. За елемент $x \in [0,1]$ не постоји $y \leq x$ који има непосредног претходника, док елемент $x \notin [0,1]$ постоји $y \leq x$ који има непосредног претходника (нпр. $y = 2$). Према томе $[0,1]$ је дефинисан формулом:

$$\forall y\, (y \leq x \Rightarrow \neg\pi(y)).$$

Слично, за елемент $x \in [2,3]$ постоји јединствен елемент $y \leq x$ (то је $y = 2$) који има претходника, док за елемент $x \notin [2,3]$ или не постоји елемент $y \leq x$ који има претходника (ако $x \in [0,1]$) или постоје бар два елемента $y \leq x$ која имају претходника (то су $y = 2$ и $y = 4$). Према томе $[2,3]$ је дефинисан формулом:

$$\exists y\, [y \leq x \wedge \pi(y) \wedge \forall z\, (z \leq x \wedge \pi(z) \Rightarrow z = y)].$$

(2) Докажимо прво $2n \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$, за $n \geq 0$. $0 \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$ јер је 0 најмањи елемент у A, тј. задовољава формулу $\forall y\, (x \leq y)$. Ако $2n \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$, тада је $2n+2$ најмањи елемент већи од $2n$ који има претходника, тј. дефинисан је формулом са параметром $2n$:

$$2n < x \wedge \pi(x) \wedge \forall y\, [2n < y < x \Rightarrow \neg\pi(y)].$$

Дакле, $2n+2 \in \mathrm{dcl}(2n)$, па по индукцијској хипотези $2n+2 \in \mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(\emptyset)) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$.

Даље уочимо формулу $\sigma(x)$ која каже "x има непосредног следбеника":

$$\sigma(x) = \exists y\, [x < y \wedge \forall z\, (x < z \Rightarrow y \leq z)].$$

Јасно је $\sigma(A) = \{2n+1 \mid n \geq 0\}$. Сада можемо да докажемо да $2n+1 \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$, за $n \geq 0$. Најпре 1 је најмањи елемент који има следбеника, тј. задовољава формулу $\sigma(x) \wedge \forall y\, (\sigma(y) \Rightarrow x \leq y)$, па $1 \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$. Као и малопре, ако $2n+1 \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$, тада је $2n+3$ најмањи елемент већи од $2n+1$ који има следбенка, тј. дефинисан је формулом са параметром $2n+1$:

$$2n+1 < x \wedge \sigma(x) \wedge \forall y\, [2n+1 < y < x \Rightarrow \neg\sigma(y)].$$

Дакле, $2n+3 \in \mathrm{dcl}(2n+1)$, па по индукцијској хипотези $2n+3 \in \mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(\emptyset)) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$.

Према томе, $\mathrm{dcl}(\emptyset) \supseteq \mathbf{N}$. Доказаћемо да је $\mathrm{dcl}(\emptyset) = \mathbf{N}$. Нека је $a \in A \setminus \mathbf{N}$ и нека је $2n < a < 2n+1$. Приметимо да можемо изабрати растућу бијекцију $g : [2n, 2n+1] \longrightarrow [2n, 2n+1]$ такву да $g(2n) = 2n$, $g(2n+1) = 2n+1$ и $g(a) \neg a$. Тада је $f : A \longrightarrow A$ дефинисана са $f(x) = g(x)$, за $x \in [2n, 2n+1]$, и $f(x) = x$, за $x \neq [2n, 2n+1]$, је растућа бијекција, тј. аутоморфизам структуре $\mathbb{A}$. Како $f(a) = g(a) \neq a$, то $a \notin \mathrm{dcl}(\emptyset)$. $\dashv$

5. Нека је E релација еквиваленције на скупу A са две бесконачне класе. Доказати да теорија T модела $\mathbb{A} = (A, E)$ има елиминацију квантификатора.

Решење. Довољно је елиминисати егзистенцијални квантификатор у формули $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$, $\bar{y} = y_1 y_2 \dots y_n$, где је $\phi(x, \bar{y})$ коњункција атомичних формула и њихових негација. (Претходно добијамо стандардним аргументом.) Атомичне формуле у којима учествује x су: $x = x$, $x = y_i$, $E(x,x)$ и $E(x, y_i)$ ($y_i = x$ можемо да заменимо са $x = y_i$ и $E(y_i, x)$ можемо да заменимо са $E(x, y_i)$, јер T "говори" о симетричности релације E). Негације атомичних формула у којима учествује x су дакле: $x \neq x$, $x \neq y_i$, $\neg E(x,x)$ и $\neg E(x, y_i)$.

[1] $z \leq y$ је уобичајена замена за $z < y \vee z = y$.

Ако се формула $x \neq x$ или $\neg E(x,x)$ јавља као коњункт у $\phi(x,\bar{y})$, очигледно је $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ еквивалентна $\perp$. Ако је формула $\phi(x,\bar{y})$ једнака $x = x$ или $E(x,x)$, очигледно је $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ еквивалентна $\top$. Ако се формула $x = x$ или $E(x,x)$ јавља као коњункт, али није једини коњункт, у $\phi(x,\bar{y})$, онда очигледно тај коњункт можемо да "избришемо".

Дакле, можемо да претпоставимо да је $\phi(x,\bar{y})$ једнака:

$$\bigwedge_{i\in I} x = y_i \wedge \bigwedge_{i\in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i\in K} E(x,y_i) \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x,y_i) \wedge \psi(\bar{y}),$$

где $I, J, K, L \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Ако је $I \neq \emptyset$ и $i \in I$, тада је $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ очигледно еквивалентна $\phi(y_i,\bar{y})$ (свако x заменимо са y_i). Претпоставимо да је $I = \emptyset$, тј. $\phi(x,\bar{y})$ је једнака:

$$\bigwedge_{i\in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i\in K} E(x,y_i) \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x,y_i) \wedge \psi(\bar{y}).$$

Уочимо формулу $\phi'(x,\bar{y})$:

$$\bigwedge_{i\in K} E(x,y_i) \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x,y_i) \wedge \psi(\bar{y}).$$

Приметимо да је $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ еквивалентна $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$. Јасно је да $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ повлачи $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$. Али такође ако је $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$ тачна, тада је и $\exists x\, \phi(x,\bar{y})$ тачна јер су класе еквиваленције бесконачне, па можемо сведочити егзистенцијални квантификатор елементом који није једнак y_i за $i \in J$.

Дакле, свели смо на проблем да елиминишемо квантификатор у $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$. Ако су $K, L \neq \emptyset$, $k \in K$ и $l \in L$, тада је $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$ еквивалентна са формулом $\theta(\bar{y})$:

$$\bigwedge_{i,j\in K} E(y_i,y_j) \wedge \bigwedge_{i,j\in L} E(y_i,y_j) \wedge \neg E(y_k,y_l) \wedge \psi(\bar{y}).$$

Заиста, ако је $\phi(x,\bar{y})$ тачна, тада је x у релацији са свим y_i, $i \in K$, па су и y_i, $i \in K$, међусобно у релацији; такође x није у релацији са свим y_i, $i \in L$, па како постоје две класи то су и y_i, $i \in L$, међусобно у релацији; коначно, y_k и y_l нису у релацији јер x јесте у релацији са y_k, а није у релацији са y_l. Обратно, ако је $\theta(\bar{y})$ тачна, тада су y_i, $i \in K$, у истој класи, y_i, $i \in L$, су у истој класи, и те класе су различите јер $\neg E(y_k,y_l)$. Тада било који x из класе y_k задовољава формулу $\phi'(x,\bar{y})$, па је $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$ тачна.

Остаје да елиминишемо квантификатор ако је $K = \emptyset$ или $L = \emptyset$. Ако је $\phi'(x,\bar{y})$ једнака:

$$\bigwedge_{i\in K} E(x,y_i) \wedge \psi(\bar{y}) \quad \text{или} \quad \bigwedge_{i\in L} \neg E(x,y_i) \wedge \psi(\bar{y}),$$

уз слично објашење као и у преходном пасусу $\exists x\, \phi'(x,\bar{y})$ је еквивалентна са:

$$\bigwedge_{i,j\in K} E(y_i,y_j) \wedge \psi(\bar{y}), \quad \text{односно} \quad \bigwedge_{i,j\in L} E(y_i,y_j) \wedge \psi(\bar{y}).$$

Коначно, ако $K = L = \emptyset$, тада је $\exists x \phi'(x,\bar{y})$ тривијално еквивалентна са $\psi(\bar{y})$. $\dashv$

6. Језик теорије група $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ интерпретирати на скупу природних бројева $\mathbf{N}$ тако да добијени модел буде изоморфан са адитивном групом целих бројева $(\mathbf{Z}, +, -, 0)$.

Решење. Познато је да постоји бијекција $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ (коју је још тривијално и конструисати, али то није суштина задатка). Дефинишимо на $\mathbf{N}$ структуру $\mathbb{A} = (\mathbf{N}, \cdot^{\mathbb{A}}, ^{-1^{\mathbb{A}}}, e^{\mathbb{A}})$ са: $n \cdot^{\mathbb{A}} m = f^{-1}(f(n) + f(m))$, $n^{-1^{\mathbb{A}}} = f^{-1}(-f(n))$ и $e^{\mathbb{A}} = f^{-1}(0)$.

Сада је лако видети да је $f : \mathbb{A} \longrightarrow (\mathbf{Z}, +, -, 0)$ изоморфизам структура. $\dashv$

7. Нека је λ најопштији унификатор за скуп $S = \{t_i \sim s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ и претпоставимо да је $\lambda\lambda = \lambda$. Доказати да је замена σ унификатор за S ако и само ако је $\sigma = \lambda\sigma$.

Решење. $\Rightarrow$: Ако је σ унификатор за S, тада је $\sigma = \lambda\sigma'$ (јер је λ најопштији унификатор). Сада је $\sigma = \lambda\sigma' = (\lambda\lambda)\sigma' = \lambda(\lambda\sigma') = \lambda\sigma$.

$\Leftarrow$: Нека је $\sigma = \lambda\sigma$. Тада је $t_i\sigma = t_i(\lambda\sigma) = (t_i\lambda)\sigma = (s_i\lambda)\sigma = s_i(\lambda\sigma) = s_i\sigma$, па је σ унификатор за S. $\dashv$

8. Методом резолуције испитати ваљаност формуле $(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \Rightarrow \exists z(P(z) \Rightarrow Q(z))$.

Решење. Најпре ћемо наћи пренекс нормалну форму негације дате формуле:

$$\begin{aligned}\neg[(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \Rightarrow \exists z(P(z) \Rightarrow Q(z))] &\equiv (\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \land \neg\exists z(P(z) \Rightarrow Q(z)) \\ &\equiv (\neg\forall x P(x) \lor \exists y Q(y)) \land \forall z \neg(\neg P(z) \lor Q(z)) \\ &\equiv (\exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)) \land \forall z(P(z) \land \neg Q(z)) \\ &\equiv \exists x \exists y \forall z[(\neg P(x) \lor Q(y)) \land P(z) \land \neg Q(z)].\end{aligned}$$

Сколемова форма последње формуле је $\forall z[(\neg P(a) \lor Q(b)) \land P(z) \land \neg Q(z)]$. Користимо метод резолуције:

1.	$\{\neg P(a), Q(b)\}$	
2.	$\{P(z_2)\}$	
3.	$\{\neg Q(z_3)\}$	
4.	$\{Q(b)\}$	из 1. и 2. уз замену $[z_2/a]$
5.	$\emptyset$	из 3. и 4. уз замену $[z_3/b]$

Према томе, полазна формула је ваљана. $\dashv$

Студенти који поправљају **први део** раде задатке: **1, 2, 3. и 7.** Студенти који поправљају **други део** раде задатке: **4, 5, 6. и 8.** Студенти који полажу **цео испит** раде задатке **1, 2, 3, 4, 5. и 6.**