Мат. логика у рачунарству, Јун 2016. *12. јун 2016.*

1. Природном дедукцијом доказати следећи Аристотелов силогизам:

$$\vdash\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x))\ \wedge\ \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))\ \Rightarrow\ \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x)).$$

Решење. Нека је $\phi = \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$.

1	$\phi \vdash \phi$	аксиома
2	$\phi \vdash \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)$	$\wedge_E$ на 1
3	$\phi \vdash \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$	$\wedge_E$ на 1
4	$\phi,\ q(x) \Rightarrow r(x) \vdash q(x) \Rightarrow r(x)$	аксиома
5	$\phi \vdash p(x) \Rightarrow q(x)$	$\forall_E$ на 2
6	$\phi,\ q(x) \Rightarrow r(x) \vdash p(x) \Rightarrow q(x)$	слабљење на 5
7	$\phi,\ q(x) \Rightarrow r(x) \vdash p(x) \Rightarrow r(x)$	$\Rightarrow_t$ на 6 и 4
8	$\phi,\ q(x) \Rightarrow r(x) \vdash \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$	$\exists_U$ на 7
9	$\phi \vdash \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$	$\exists_E$ на 3 и 8
10	$\vdash \phi \Rightarrow \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$	$\Rightarrow_U$ на 9

□

2. Израчунати Сколемову форму следеће формуле:

$$\forall x \exists y\, p(x,y) \wedge (\forall x \exists y\, q(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\, s(x,y)).$$

Решење. Најпре тражимо пренекс.

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y\, p(x,y) \wedge (\forall x \exists y\, q(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\, s(x,y)) &\equiv \forall x \exists y\, p(x,y) \wedge (\neg \forall x \exists y\, q(x,y) \vee \forall x \exists y\, s(x,y)) \\
&\equiv \forall x \exists y\, p(x,y) \wedge (\exists x \forall y\, \neg q(x,y) \vee \forall x \exists y\, s(x,y)) \\
&\equiv \exists x[\forall z \exists y\, p(z,y) \wedge (\forall y\, \neg q(x,y) \vee \forall z \exists y\, s(z,y))] \\
&\equiv \exists x \forall z[\exists u\, p(z,u) \wedge (\forall y\, \neg q(x,y) \vee \exists v\, s(z,v))] \\
&\equiv \exists x \forall z \exists u \exists v \forall y[p(z,u) \wedge (\neg q(x,y) \vee s(z,v))].
\end{aligned}$$

После Сколемизације $x \mapsto a$, $u \mapsto f(z)$, $v \mapsto g(z)$ добијамо Сколемову форму:

$$\forall z \forall y[p(z,f(z)) \wedge (\neg q(a,y) \vee s(z,g(z)))].$$

□

3. Дати пример коначне теорије T такве да је $\mathrm{fs}(T) = \left\{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \geqslant 1\right\}$.

Решење. Нека је T_0 коначна теорија на језику $\mathcal{L} = \{1, c, <, S, Z, P\}$ коју смо конструисали на вежбама. За T_0 важи: $\mathbb{M} \models T_0$ и $|\mathbb{M}| = n$ акко $\mathbb{M} \cong \mathbb{M}_n$, где је $\mathbb{M}_n$ модел на домену $\{1, 2, \dots, n\}$ у коме интерпретирамо 1 као 1, c као n, $<$ као уобичајено уређење, $S(k,l)$ акко $k+1=l$, $Z(k,l,m)$ акко $k+l=m$ и $P(k,l,m)$ акко $kl=m$.

Проширићемо теорију T_0 до T тако да се обезбедимо да је c облика $n(n+1)/2$. Приметимо да је или n или $n+1$ парно, па ћемо c написати или као $(n/2)\cdot(n+1)$ или као $n \cdot ((n+1)/2)$. Дакле, нека је:

$$T = T_0 \cup \{\exists xyz\,(Z(x,x,y) \wedge S(y,z) \wedge P(x,z,c))\ \vee\ \exists xyz\,(S(x,y) \wedge Z(z,z,y) \wedge P(x,z,c))\}.$$

(Први дисјункт у додатој формули, каже да је $x = y/2$, $z = y+1$, па је $c = xz = (y/2)(y+1)$. Други дисјункт каже да је $y = x+1$, $z = y/2 = (x+1)/2$, па је $c = xz = x(x+1)/2$.) Сада је лако доказати да је коначан $\mathbb{M} \models T$ акко $\mathbb{M} \cong \mathbb{M}_{n(n+1)/2}$ за неко n. □

Дат је модел $\mathbb{A} = (\mathbf{Q}, <, E, E')$, где је $<$ уобичајено уређење рационалних бројева, а E, E' еквиваленције дате са:

$$E(a,b) \text{ акко } a-b \in \mathbf{Z}, \qquad E'(a,b) \text{ акко } a-b \in 2\mathbf{Z}.$$

4. **(а)** Одредити $\mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(0)$.

(б) Испитати да ли су скупови $\{2m+1 \mid m \in \mathbf{Z}\}$ и $\{1/m \mid m \in \mathbf{Z},\, m > 0\}$ дефинабилни (са параметрима).

Решење. **(а)** Приметимо да за свако $a \in \mathbf{Q}$, елементи $a+1$ и $a-1$ су a-дефинабилни. Заиста, $a+1$ је дефинисан као ,,најмањи елемент већи од a који је у E-релацији са a", а $a-1$ је ,,највећи елемент мањи од a који је у E-релацији са a". Сада индукцијом видимо да је $\mathbf{Z} \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(0)$.

Нека је f_0 растућа бијекција скупа $[0,1) \cap \mathbf{Q}$ која фиксира једино 0, и нека је f дефинисано на $\mathbf{Q}$ као: $f(a) = f_0(a - \lfloor a \rfloor) + \lfloor a \rfloor$. ($\lfloor a \rfloor$ је доњи цео део од a.) Лако је видети да је f аутоморфизам модела $\mathbb{A}$ који фиксира једино елементе из $\mathbf{Z}$. Зато, $\mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(0) = \mathbf{Z}$.

(б) Скуп непарних бројева је дефинисан формулом (са параметром 1) $E'(x,1)$. Доказаћемо да $\{1/m \mid m \in \mathbf{Z},\, m > 0\}$ није дефинабилан. У супротном, постоји формула са коначно много параметара $a_1, \ldots, a_n$ која га дефинише. Нека је $b_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Приметимо да постоји растућа бијекција f_0 скупа $[0,1) \cap \mathbf{Q}$ која фиксира 0 и све b_i, али не фиксира скуп $\{1/m \mid m \in \mathbf{Z},\, m > 0\}$. Пресликавање $f(a) = f_0(a - \lfloor a \rfloor) + \lfloor a \rfloor$ дефинише аутоморфизам модела $\mathbb{A}$ који фиксира све a_i, али не фиксира $\{1/m \mid m \in \mathbf{Z},\, m > 0\}$. Контрадикција. □

5. **(а)** Доказати да $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ елиминише квантификатор у формули:

$$\exists x \left(x \neq y_1 \wedge E(x,y_2) \wedge E'(x,y_3) \wedge \neg E(x,y_4) \wedge \neg E'(x,y_5)\right).$$

(б) Доказати да $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ нема елиминацију квантификатора.

Решење. **(а)** Најпре приметимо да је дата формула еквивалентна са:

$$\exists x \left(E(x,y_2) \wedge E'(x,y_3) \wedge \neg E(x,y_4) \wedge \neg E'(x,y_5)\right).$$

Имликација ($\Leftarrow$) следи из чињенице да су E и E'-класе бесконачне, па ако постоји x који је у E-класи са y_2 и E'-класи са y_3, можемо да изаберемо такво x да је различито од y_1.

Тврдимо да је ова формула еквивалентна са:

$$E(y_2,y_3) \wedge \neg E(y_2,y_4) \wedge \neg E'(y_3,y_5).$$

Импликација ($\Rightarrow$) је јасна: Нека постоји x који је у E-класи са y_2, али не са y_4, и који је у E'-класи са y_3, али не са y_5. Како су E и E' еквиваленције, и како је E ,,финија" од E' (у смислу да $E'(u,v)$ повлачи $E(u,v)$), јасно је да важи уочена бескванторна формула.

За доказ импликације ($\Leftarrow$) претпоставимо да важи $E(y_2,y_3) \wedge \neg E(y_2,y_4) \wedge \neg E'(y_3,y_5)$. Приметимо да је тада $x = y_3$ један сведок да важи: $\exists x \left(E(x,y_2) \wedge E'(x,y_3) \wedge \neg E(x,y_4) \wedge \neg E'(x,y_5)\right)$.

(б) Приметили смо у 4. задатку да је 1 дефинабилан са параметром 0 формулом: ,,y је најмањи елемент већи од 0 који је у E-релацији са 0". Означимо ову формулу са $\phi(y,0)$. Ако би $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ имала елиминацију квантификатора, постојала би формула $\psi(y,0)$ без квантификатора која је еквивалентна са $\phi(y,0)$, тј. која дефинише $\{1\}$. Међутим, формула без квантификатора по променљивој y са параметром 0 је Булова комбинација следећих формула: $y < 0, y = 0$, $0 < y$, $E(y,0)$ и $E'(y,0)$ (плус можда још и формула као што су $y < y$, $y = y$ и сличне, које дефинишу или $\emptyset$ или $\mathbf{Q}$). Сада индукцијом лако закључујемо да Булова комбинација оваквих скупова не може да дефинише $\{1\}$. Дакле, $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ не може имати елиминацију квантификатора. □

6. Доказати да постоји $\mathbb{A}' \models \mathrm{Th}(\mathbb{A})$ и елементи $a, b \in \mathbb{A}'$ такви да је подскуп од $\mathbb{A}'$ дефинисан формулом $E(a,x) \ \wedge \ a < x \ \wedge \ x < b$ бесконачан.

Решење. Проширимо језик са константним симболима a и b. Уочимо реченицу ϕ_n која каже: ,,постоји бар n елемената x таквих да $E(a,x) \wedge a < x \wedge x < b$". Јасно је да је довољно да докажемо да теорија $T = \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\phi_n \mid n \geqslant 1\}$ има модел. По теореми компактности, довољно је да докажемо да свака $T_0 = \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \{\phi_{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ има модел. Нека је $N = \max\{n_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Приметимо да можемо додефинисати $\mathbb{A}$ до модела за T_0; довољно је само да интерпретирамо a као 0, а b као $N+1$. Тада је ϕ_N тачна, па су и све ϕ_{n_i} тачне. □