

1. Нека је  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\mathbb{N}$  филтер у Буловој алгебри  $\mathcal{P}\mathbb{N}$ . Показати да је  $\mathcal{F}$  ултрафилтер ако и само ако за сваки скуп  $A \subseteq \mathbb{N}$  важи  $A \in \mathcal{F}$  или  $\mathbb{N} - A \in \mathcal{F}$ .
2. (а) Користећи само аксиоме Булових алгебри<sup>1</sup>, показати да из  $x \wedge y = x \wedge z$  и  $x' \wedge y = x' \wedge z$  следи  $y = z$ .  
(б) Показати асоцијативни закон:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .
3. Показати:  $\vdash A \Rightarrow A$ .<sup>2</sup>
4. Нека је  $A = p(f(x), y) \Rightarrow p(x, f(y))$  формула првог реда. Испитати ваљаност формула  $\exists x \exists y A$  и  $\exists x \forall y A$ .
5. Нека су  $A$  и  $B$  произвољне формуле првог реда и нека  $B$  нема слободна појављивања променљиве  $x$ . Показати да је формула  $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A \wedge B$  ваљана.

<sup>1</sup> За аксиоме Булових алгебри узимамо комутативност, дистрибутивност и аксиоме  $x \wedge 1 = x$ ,  $x \vee 0 = x$ ,  $x \wedge x' = 0$ ,  $x \vee x' = 1$ .

<sup>2</sup> Дозвољено је користити само аксиоме Хилбертовог система за Исказни рачун и Модус поненс.

1. Нека је  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\mathbb{N}$  филтер у Буловој алгебри  $\mathcal{P}\mathbb{N}$ . Показати да је  $\mathcal{F}$  ултрафилтер ако и само ако за сваки скуп  $A \subseteq \mathbb{N}$  важи  $A \in \mathcal{F}$  или  $\mathbb{N} - A \in \mathcal{F}$ .
2. (а) Користећи само аксиоме Булових алгебри<sup>1</sup>, показати да из  $x \wedge y = x \wedge z$  и  $x' \wedge y = x' \wedge z$  следи  $y = z$ .  
(б) Показати асоцијативни закон:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .
3. Показати:  $\vdash A \Rightarrow A$ .<sup>2</sup>
4. Нека је  $A = p(f(x), y) \Rightarrow p(x, f(y))$  формула првог реда. Испитати ваљаност формула  $\exists x \exists y A$  и  $\exists x \forall y A$ .
5. Нека су  $A$  и  $B$  произвољне формуле првог реда и нека  $B$  нема слободна појављивања променљиве  $x$ . Показати да је формула  $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A \wedge B$  ваљана.

<sup>1</sup> За аксиоме Булових алгебри узимамо комутативност, дистрибутивност и аксиоме  $x \wedge 1 = x$ ,  $x \vee 0 = x$ ,  $x \wedge x' = 0$ ,  $x \vee x' = 1$ .

<sup>2</sup> Дозвољено је користити само аксиоме Хилбертовог система за Исказни рачун и Модус поненс.

1. Нека је  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\mathbb{N}$  филтер у Буловој алгебри  $\mathcal{P}\mathbb{N}$ . Показати да је  $\mathcal{F}$  ултрафилтер ако и само ако за сваки скуп  $A \subseteq \mathbb{N}$  важи  $A \in \mathcal{F}$  или  $\mathbb{N} - A \in \mathcal{F}$ .
2. (а) Користећи само аксиоме Булових алгебри<sup>1</sup>, показати да из  $x \wedge y = x \wedge z$  и  $x' \wedge y = x' \wedge z$  следи  $y = z$ .  
(б) Показати асоцијативни закон:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .
3. Показати:  $\vdash A \Rightarrow A$ .<sup>2</sup>
4. Нека је  $A = p(f(x), y) \Rightarrow p(x, f(y))$  формула првог реда. Испитати ваљаност формула  $\exists x \exists y A$  и  $\exists x \forall y A$ .
5. Нека су  $A$  и  $B$  произвољне формуле првог реда и нека  $B$  нема слободна појављивања променљиве  $x$ . Показати да је формула  $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A \wedge B$  ваљана.

<sup>1</sup> За аксиоме Булових алгебри узимамо комутативност, дистрибутивност и аксиоме  $x \wedge 1 = x$ ,  $x \vee 0 = x$ ,  $x \wedge x' = 0$ ,  $x \vee x' = 1$ .

<sup>2</sup> Дозвољено је користити само аксиоме Хилбертовог система за Исказни рачун и Модус поненс.

1. Нека је  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\mathbb{N}$  филтер у Буловој алгебри  $\mathcal{P}\mathbb{N}$ . Показати да је  $\mathcal{F}$  ултрафилтер ако и само ако за сваки скуп  $A \subseteq \mathbb{N}$  важи  $A \in \mathcal{F}$  или  $\mathbb{N} - A \in \mathcal{F}$ .
2. (а) Користећи само аксиоме Булових алгебри<sup>1</sup>, показати да из  $x \wedge y = x \wedge z$  и  $x' \wedge y = x' \wedge z$  следи  $y = z$ .  
(б) Показати асоцијативни закон:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .
3. Показати:  $\vdash A \Rightarrow A$ .<sup>2</sup>
4. Нека је  $A = p(f(x), y) \Rightarrow p(x, f(y))$  формула првог реда. Испитати ваљаност формула  $\exists x \exists y A$  и  $\exists x \forall y A$ .
5. Нека су  $A$  и  $B$  произвољне формуле првог реда и нека  $B$  нема слободна појављивања променљиве  $x$ . Показати да је формула  $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A \wedge B$  ваљана.

<sup>1</sup> За аксиоме Булових алгебри узимамо комутативност, дистрибутивност и аксиоме  $x \wedge 1 = x$ ,  $x \vee 0 = x$ ,  $x \wedge x' = 0$ ,  $x \vee x' = 1$ .

<sup>2</sup> Дозвољено је користити само аксиоме Хилбертовог система за Исказни рачун и Модус поненс.