Teorija brojeva, M smer, februar 2012

1. Rešite sistem kongruencija:

$$x \equiv 2 \pmod 5, \qquad x \equiv 3 \pmod{11}, \qquad 4x \equiv 5 \pmod{17}.$$

2. Dokažite da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}.$$

3. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ (sa dokazom). Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu.

4. Ako je $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\mathbb{Z}[\omega]$ prsten celih u $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ i π proizvoljan prost element u $\mathbb{Z}[\omega]$, dokažite da je količnički prsten $\mathbb{Z}[\omega]/\pi\mathbb{Z}[\omega]$ konačno polje sa $N(\omega)$ elemenata.

5. Neka je n neparan prirodan broj i $(a,n) = 1$. *Simbol Zolotareva* $(\frac{a}{n})_Z$ definišemo kao znak permutacije $x \mapsto ax$ kompletnog sistema ostataka $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ modulo n.

   (a) Izračunajte simbol Zolotareva $(\frac{8}{15})_Z$.

   (b) Za pozitivno neparno n dokažite: $\left(\frac{-1}{n}\right)_Z = (-1)^{(n-1)/2}$.

   (c) Neka je p prost broj. Neka je h red elementa a u multiplikativnoj grupi $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Dokažite da se onda permutacija $x \mapsto ax$ raspada na jedan 1-cikl i $\frac{p-1}{h}$ h-ciklova.

   (d) Dokažite da se za p prost i $(a,p) = 1$, simboli Zolotareva i Legendre-a poklapaju, tj. da važi:

$$\left(\frac{a}{p}\right)_Z = \left(\frac{a}{p}\right)_L.$$

Teorija brojeva, L smer, februar 2012

1. Rešite sistem kongruencija:

$$x \equiv 2 \pmod 5, \qquad x \equiv 3 \pmod{11}, \qquad 4x \equiv 5 \pmod{17}.$$

2. Odredite vrednosti Legendre-ovih simbola $(\frac{-30}{61})$, $(\frac{442}{139})$.

3. Dokažite da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}.$$

4. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ (sa dokazom). Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu.

5. Dokažite da za prost broj p važi: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.