Teorija brojeva, januar 2012.

1. Primetite da je $(2+i)(2-i) = 5 = (1+2i)(1-2i)$ u prstenu Gauß-ovih celih $\mathbb{Z}[i]$. Da li to znači da u ovom prstenu nemamo jedinstvenu faktorizaciju? Obrazložiti.
2. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$. Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu. Odredite sve jedinice u tom prstenu.
3. Odredite *sve* proste brojeve u prstenu $\mathbb{Z}[i]$ čija norma je u intervalu $[10, 20]$. (sa dokazom)
4. Naći sve proste brojeve p za koje je kongruencija $x^2 \equiv 10 \pmod{p}$ rešiva.
5. Aritmetička funkcija τ_k je definisana kao multiplikativna konvolucija $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{k}$ konstantne aritmetičke funkcije 1. Dokazati:
   (a) $\tau_k(n) = \sum_{m|n} \tau_{k-1}(m)$;
   (b) $\sum_{m|n} \mu(m)\tau(\frac{n}{m}) = 1$; ovde $\tau := \tau_2$;
   (c) $\tau(n^2) = \sum_{m^2|n} \mu(m)\tau_3(\frac{n}{m^2})$;
   (d) $\tau(n)^2 = \sum_{m^2|n} \mu(m)\tau_4(\frac{n}{m^2})$.

Teorija brojeva, januar 2012.

1. Primetite da je $(2+i)(2-i) = 5 = (1+2i)(1-2i)$ u prstenu Gauß-ovih celih $\mathbb{Z}[i]$. Da li to znači da u ovom prstenu nemamo jedinstvenu faktorizaciju? Obrazložiti.
2. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$. Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu. Odredite sve jedinice u tom prstenu.
3. Odredite *sve* proste brojeve u prstenu $\mathbb{Z}[i]$ čija norma je u intervalu $[10, 20]$. (sa dokazom)
4. Naći sve proste brojeve p za koje je kongruencija $x^2 \equiv 10 \pmod{p}$ rešiva.
5. Aritmetička funkcija τ_k je definisana kao multiplikativna konvolucija $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{k}$ konstantne aritmetičke funkcije 1. Dokazati:
   (a) $\tau_k(n) = \sum_{m|n} \tau_{k-1}(m)$;
   (b) $\sum_{m|n} \mu(m)\tau(\frac{n}{m}) = 1$; ovde $\tau := \tau_2$;
   (c) $\tau(n^2) = \sum_{m^2|n} \mu(m)\tau_3(\frac{n}{m^2})$;
   (d) $\tau(n)^2 = \sum_{m^2|n} \mu(m)\tau_4(\frac{n}{m^2})$.