Teorija brojeva, M smer, septembar 2012

1. Za prirodne brojeve m i n sa (m,n) označavamo njihov najveći zajednički delioc. Ako sa φ označimo Eulerovu funkciju, dokažite da za bilo koje $m,n \in \mathbb{N}$ važi sledeći identitet:
$$\varphi(mn)\varphi(\,(m,n)\,) = (m,n)\varphi(m)\varphi(n).$$

2. Za bilo koje prirodne brojeve q i n definišimo *Ramanujanovu sumu* kao
$$c_q(n) = \sum_{\substack{1\le x\le q\\(x,q)=1}} e\left(\frac{nx}{q}\right).$$
Dokažite da važi sledeća formula
$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} d\,\mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

3. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ (sa dokazom). Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu.

4. Neka je dat prost broj $p \equiv 1 \pmod 4$. Tada se on može napisati kao zbir kvadrata nekih prirodnih brojeva $p = a^2 + b^2$, pri čemu uzimamo da je a neparan. Dokazati sledeća tvrđenja:
   (a) $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$;
   (b) $\left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{((a+b)^2-1)/8}$;
   (c) $(a+b)^2 \equiv 2ab \pmod p$;
   (d) $(a+b)^{(p-1)/2} \equiv (2ab)^{(p-1)/4} \pmod p$.
   (e) Neka je c takvo da je $b \equiv ac \pmod p$. Dokazati da je $c^2 \equiv -1 \pmod p$ i da je
   $$2^{(p-1)/4} \equiv c^{ab/2} \pmod p.$$
   (f) Dokazati da kongruencija $x^4 \equiv 2 \pmod p$ ima rešenja za $p \equiv 1 \pmod 4$ (kažemo da je 2 *bikvadratni ostatak* modulo p) ako i samo ako je p oblika $A^2 + 64B^2$, za neke cele brojeve A i B.

   Od pomoći može biti i sledeća jednakost $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2p$.

5. Neka je K brojno polje i neka su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dve proizvoljne baze raširenja $K/\mathbb{Q}$. Neka je $\alpha_i = \sum_j a_{ij}\beta_j$, za skalare $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Dokazati da onda važi jednakost
$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det(a_{ij})^2 \Delta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$
gde je sa Δ označena diskriminanta baze.

Teorija brojeva, L smer, septembar 2012

1. Rešite sistem kongruencija:
$$x \equiv 2 \pmod 5, \qquad x \equiv 3 \pmod 8, \qquad 4x \equiv 5 \pmod{13}.$$

2. Odredite vrednosti Legendreovih simbola $\left(\frac{-30}{1213}\right)$, $\left(\frac{442}{587}\right)$, $\left(\frac{-805}{1103}\right)$.

3. Neka je $(u,v) = 1$ za neke prirodne brojeve u i v. Dokazati da je onda najveći zajednički delilac $(u+v, u-v)$ ili 1 ili 2.

4. Odredite prsten celih u kvadratnom raširenju $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ (sa dokazom). Odredite bar jednu njegovu integralnu bazu.

5. (a) Odrediti tri poslednje cifre broja 7^{9999}.
   (b) Dokazati da je $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$, ako su p i q različiti prosti brojevi.