Увод у математичку логику, Први колоквијум 2010/11.

Група А — *4. децембар 2011.*

1. Нека су A, B, C, D скупови.

   а) Доказати: $A \times ((B \cup C) - D) = (A \times (B - D)) \cup (A \times (C - D))$.

   б) Доказати: $(A - B) - C = A - B$ ако и само ако је $A \cap C \subseteq B$.

2. Нека су θ и ρ еквиваленције на скупу A такве да $\theta \circ \rho \subseteq \rho \circ \theta$. Доказати да је $\theta \circ \rho$ еквиваленција.

3. На скупу $\mathsf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ дефинисана је релација $\trianglelefteq$ са:

$$a \trianglelefteq b \text{ акко } b = a^k, \text{ за неко } k \in \mathsf{N}.$$

   Доказати да је $\trianglelefteq$ поредак на скупу N^+ и одредити (ако постоје) минималне, максималне, најмањи и највећи елемент.

4. Нека је $f : A \longrightarrow B$. За свако $a \in A$ означимо $M_a = A - \{a\}$, и за свако $b \in B$ означимо $N_b = B - \{b\}$. Доказати да је f 1-1 ако и само ако за свако $a \in A$ и свако $b \in B$ важи $f^{-1}[f[M_a] - N_b] = M_a - f^{-1}[N_b]$.

5. Конструисати бијекцију $f : \mathsf{Z} \times \{0, 1\} \longrightarrow \{2, 3\} \times \mathsf{N}$.

---

6. **(1О1)** Исказ и доказ теореме дедукције Лукашиевичевог рачуна.

6. **(1О2 и 1О3)** Са $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, је дефинисан низ Фибоначијевих бројева. Доказати да $5 | F_{5n}$, $n \geq 0$.

6. **(1О4)**

   а) Теорема потпуности за исказни рачун (са доказом).

   б) Канторова теорема (са доказом).

   в) Навести аксиому избора и бар два еквивалента аксиоме избора.

---

*Студент предаје **само једну** дволисницу из свеске, на којој треба да напише име и презиме, број индекса, ознаку групе у којој слуша наставу и ознаку групе задатака.*

Увод у математичку логику, Први колоквијум 2010/11.

Група Б — *4. децембар 2011.*

1. Нека су A, B, C, D скупови.

   а) Доказати: $A \times ((B \cap C) - D) = (A \times (B - D)) \cap (A \times (C - D))$.

   б) Доказати: $(A - B) - C = A - C$ ако и само ако је $A \cap B \subseteq C$.

2. Нека су θ и ρ еквиваленције на скупу A такве да $\rho \circ \theta \subseteq \theta \circ \rho$. Доказати да је $\theta \circ \rho$ еквиваленција.

3. На скупу $\mathsf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ дефинисана је релација $\trianglelefteq$ са:

$$a \trianglelefteq b \text{ акко } a = b^k, \text{ за неко } k \in \mathsf{N}.$$

   Доказати да је $\trianglelefteq$ поредак на скупу N^+ и одредити (ако постоје) минималне, максималне, најмањи и највећи елемент.

4. Нека је $f : A \longrightarrow B$. За свако $a \in A$ означимо $M_a = A - \{a\}$, и за свако $b \in B$ означимо $N_b = B - \{b\}$. Доказати да је f 1-1 ако и само ако за свако $a \in A$ и свако $b \in B$ важи $f^{-1}[f[M_a] \cup N_b] = M_a \cup f^{-1}[N_b]$.

5. Конструисати бијекцију $f : \{0, 1\} \times \mathsf{N} \longrightarrow \mathsf{Z} \times \{2, 3\}$.

---

6. **(1О1)** Исказ и доказ теореме дедукције Лукашиевичевог рачуна.

6. **(1О2 и 1О3)** Са $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, је дефинисан низ Фибоначијевих бројева. Доказати да $5 | F_{5n}$, $n \geq 0$.

6. **(1О4)**

   а) Теорема потпуности за исказни рачун (са доказом).

   б) Канторова теорема (са доказом).

   в) Навести аксиому избора и бар два еквивалента аксиоме избора.

---

*Студент предаје **само једну** дволисницу из свеске, на којој треба да напише име и презиме, број индекса, ознаку групе у којој слуша наставу и ознаку групе задатака.*