Увод у математичку логику, Април 2011. А група *11. април 2011.*

1. Нека су R_1, R_2 и S бинарне релације скупа A такве да $R_1 \subseteq R_2$. Испитати да ли важи $R_1 \circ S \subseteq R_2 \circ S$.

2. Нека је $f : X \longrightarrow Y$ и $A \subseteq X$. Доказати да је $f[f^{-1}[f[A]]] = f[A]$.

3. Доказати да у свакој Буловој алгебри важи: $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

4. Нека су A, B, C и D исказне формуле такве да је $(A \veebar B) \Rightarrow C$ таутологија, а $D \veebar (B \Rightarrow C)$ контрадикција. Доказати да је $A \Rightarrow (C \Leftrightarrow D)$ таутологија.

5. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\operatorname{Const} \mathcal{L} = \{a, b\}$, $\operatorname{Fun} \mathcal{L} = \emptyset$, $\operatorname{Rel} \mathcal{L} = \{p, q\}$; $\operatorname{ar} p = 2$, $\operatorname{ar} q = 3$.
Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $a^{\mathbb{M}} = 2$, $b^{\mathbb{M}} = 5$, $p^{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ акко $3 \mid m+n$, $q^{\mathbb{M}}(l, m, n) = 1$ акко $7 \mid l+m+n$.

   (а) Доказати: $\mathbb{M} \models \forall x\, p(a, x) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, q(x, b, y)$.

   (б) Доказати: $\mathbb{M} \not\models \exists x\, p(a, x) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, q(x, b, y)$.

6. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\forall x\, \forall y\, (q(x, y) \Rightarrow p(x)) \Rightarrow (\exists x\, q(a, x) \Rightarrow \exists x\, (\exists y\, q(x, y) \wedge p(x))).$$

Т. *[За студенте 1. тока]*

   (а) Теорема о ултрафилтеру.

   (б) Теорема потпуности за исказни рачун.

Увод у математичку логику, Април 2011. Б група *11. април 2011.*

1. Нека су R, S_1 и S_2 бинарне релације скупа A такве да $S_1 \subseteq S_2$. Испитати да ли важи $R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2$.

2. Нека је $f : X \longrightarrow Y$ и $B \subseteq Y$. Доказати да је $f^{-1}[f[f^{-1}[B]]] = f^{-1}[B]$.

3. Доказати да у свакој Буловој алгебри важи: $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$.

4. Нека су A, B, C и D исказне формуле такве да је $(A \veebar B) \wedge \neg C$ контрадикција, а $D \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$ таутологија. Доказати да је $A \Rightarrow (C \Leftrightarrow D)$ таутологија.

5. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\operatorname{Const} \mathcal{L} = \{a, b\}$, $\operatorname{Fun} \mathcal{L} = \emptyset$, $\operatorname{Rel} \mathcal{L} = \{p, q\}$; $\operatorname{ar} p = 2$, $\operatorname{ar} q = 3$.
Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $a^{\mathbb{M}} = 3$, $b^{\mathbb{M}} = 7$, $p^{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ акко $2 \mid m+n$, $q^{\mathbb{M}}(l, m, n) = 1$ акко $5 \mid l+m+n$.

   (а) Доказати: $\mathbb{M} \models \forall x\, p(x, a) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, q(x, b, y)$.

   (б) Доказати: $\mathbb{M} \not\models \exists x\, p(x, a) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, q(x, b, y)$.

6. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$(\exists x\, \neg p(a, x) \wedge \forall x\, \forall y\, (p(x, y) \vee q(x))) \Rightarrow \exists x\, (\exists y\, \neg p(x, y) \wedge q(x)).$$

Т. *[За студенте 1. тока]*

   (а) Теорема о ултрафилтеру.

   (б) Теорема потпуности за исказни рачун.