Увод у математичку логику, Фебруар 2012.

<u>*Група А*</u> *21. фебруар 2012.*

1. Нека $f : X \to Y$ и $A \subseteq Y$.

   а) Доказати да је $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$.

   б) Нека је f "на". Доказати да је $f[f^{-1}[A]] = A$.

   в) Навести пример када не важи $f[f^{-1}[A]] = A$.

2. Нека је ρ релација на скупу A, θ релација на скупу B, а $\sim$ релација на $A \times B$ дефинисана са: $(x, y) \sim (u, v)$ акко $x\,\rho\,u$ и $y\,\theta\,v$. Доказати:

   а) Ако су ρ и θ релације еквиваленције, и $\sim$ је релација еквиваленције.

   б) Ако су ρ и θ релације поретка, и $\sim$ је поретка.

3. Дефинишемо у Буловој алгебри затворен интервал $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Доказати: $[a, b] \cap [c, d] = [a \vee c, b \wedge d]$.

4. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$.

   [У доказу се могу користити без доказа $\vdash A \Rightarrow A$; $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$; $A, \neg A \vdash B$; $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$; $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$; $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$; $A \wedge B \vdash A$; $A \wedge B \vdash B$ и Теорема дедукције.]

5. Наћи све логички нееквивлентне исказне формуле A у којима учествују искључиво исказна слова p и q тако да формула $(A \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (A \wedge p)$ буде контрадикција.

6. Дата је формула: $\forall x\, \exists y\, (q(x, y) \Rightarrow \exists z\, p(a, z))$. Одредити један модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}})$ и један контрамодел $\mathbb{K} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}})$ за дату формулу.

7. Методом таблоа доказати да је формула $H \Rightarrow K$ ваљана, ако је:

   $H = \forall z\, (p(a) \wedge \forall x\, \exists y\, (q(y, z) \Rightarrow r(x, y)))$, $K = \forall z\, \forall u\, \exists y\, (\neg q(y, z) \vee r(u, y))$.

Студенти који полажу само други део раде задатке 3, 4, 5, 6 и 7.

Студенти који полажу цео испит раде задатке 1, 2, 4, 5, 6 и 7.

Студент предаје ***само једну*** дволисницу из свеске.

Увод у математичку логику, фебруар 2012.

<u>*Група Б*</u> *21. фебруар 2012.*

1. Нека $f : X \to Y$ и $B \subseteq Y$.

   а) Доказати да је $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.

   б) Нека је f "на". Доказати да је $f[f^{-1}[B]] = B$.

   в) Навести пример када не важи $f[f^{-1}[B]] = B$.

2. Нека је ρ релација на скупу A, θ релација на скупу B, а $\sim$ релација на $B \times A$ дефинисана са $(x, y) \sim (u, v)$ акко $x\,\theta\,u$ и $y\,\rho\,v$. Доказати:

   а) Ако су ρ и θ релације еквиваленције, и $\sim$ је релација еквиваленције.

   б) Ако су ρ и θ релације поретка, и $\sim$ је поретка.

3. Дефинишемо у Буловој алгебри затворен интервал $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Доказати: $[a, b] \cap [c, d] = [a \vee c, b \wedge d]$.

4. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$.

   [У доказу се могу користити без доказа $\vdash A \Rightarrow A$; $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$; $A, \neg A \vdash B$; $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$; $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$; $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$; $A \wedge B \vdash A$; $A \wedge B \vdash B$ и Теорема дедукције.]

5. Наћи све логички нееквивлентне исказне формуле A у којима учествују искључиво исказна слова p и q тако да формула $(p \Rightarrow (A \Rightarrow q)) \Rightarrow (A \wedge p)$ буде контрадикција.

6. Дата је формула: $\forall x\, \exists y\, (q(x, y) \Rightarrow \forall z\, p(z, a))$. Одредити један модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}})$ и један контрамодел $\mathbb{K} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}})$ за дату формулу.

7. Методом таблоа доказати да је формула $H \Rightarrow K$ ваљана, ако је :

   $H = \forall z\, (p(b) \wedge \forall x\, \exists y\, (\neg q(y, z) \vee r(x, y)))$, $K = \forall z\, \forall u\, \exists y\, (q(y, z) \Rightarrow r(u, y))$.

Студенти који полажу само други део раде задатке 3, 4, 5, 6 и 7.

Студенти који полажу цео испит раде задатке 1, 2, 4, 5, 6 и 7.

Студент предаје ***само једну*** дволисницу из свеске.