Увод у математичку логику
Јануар 2008.

1 Низови формула A_n и B_n задати су са: $A_0 = \neg p$, $A_1 = p$, $A_{n+2} = A_{n+1} \Leftrightarrow A_n$; $B_0 = \neg p$, $B_{n+1} = A_n \Leftrightarrow B_n$. Одредити (ако постоје) све $n \in \mathbb{N}$ за које је A_n таутологија као и све $n \in \mathbb{N}$ за које је A_n контрадикција. Такође, одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је B_n таутологија као и све $n \in \mathbb{N}$ за које је B_n контрадикција.

Решење: Имамо једно исказно слово, те две интерпретације: $I_1(p) = \top$, $I_2(p) = \bot$. Посматрајмо за тренутак таблицу:

	p	A_0	B_0	A_1	B_1	A_2	B_2	$\ldots$
I_1	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	
I_2	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	

Посматрајмо интерпретацију I_1. Покажимо индукцијом по n да важи $I_1(A_{3n}) = \bot$, $I_1(B_{3n}) = \bot$, $I_1(A_{3n+1}) = \top$, $I_1(B_{3n+1}) = \top$, $I_1(A_{3n+2}) = \bot$, $I_1(B_{3n+2}) = \top$. За $n = 0$ таблица потврђује тврђење. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$, тј. $I_1(A_{3n-3}) = \bot$, $I_1(B_{3n-3}) = \bot$, $I_1(A_{3n-2}) = \top$, $I_1(B_{3n-2}) = \top$, $I_1(A_{3n-1}) = \bot$, $I_1(B_{3n-1}) = \top$ и покажимо да важи за n. $I_1(A_{3n}) = I_1(A_{3n-1} \Leftrightarrow A_{3n-2}) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$, $I_1(B_{3n}) = I_1(A_{3n-1} \Leftrightarrow B_{3n-1}) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$, $I_1(A_{3n+1}) = I_1(A_{3n} \Leftrightarrow A_{3n-1}) = \bot \Leftrightarrow \bot = \top$, $I_1(B_{3n+1}) = I_1(A_{3n} \Leftrightarrow B_{3n}) = \bot \Leftrightarrow \bot = \top$, $I_1(A_{3n+2}) = I_1(A_{3n+1} \Leftrightarrow A_{3n}) = \top \Leftrightarrow \bot = \bot$, $I_1(B_{3n+2}) = I_1(A_{3n+1} \Leftrightarrow B_{3n+1}) = \top \Leftrightarrow \top = \top$. Тиме смо показали тврђење.

Посматрајмо сада интерпретацију I_2. Покажимо индукцијом по n да важи $I_2(A_{3n}) = \top$, $I_2(B_{3n}) = \top$, $I_2(A_{3n+1}) = \bot$, $I_2(B_{3n+1}) = \top$, $I_2(A_{3n+2}) = \bot$, $I_2(B_{3n+2}) = \bot$. За $n = 0$ таблица потврђује тврђење. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$, тј. $I_2(A_{3n-3}) = \top$, $I_2(B_{3n-3}) = \top$, $I_2(A_{3n-2}) = \bot$, $I_2(B_{3n-2}) = \top$, $I_2(A_{3n-1}) = \bot$, $I_2(B_{3n-1}) = \bot$ и покажимо да важи за n. $I_2(A_{3n}) = I_2(A_{3n-1} \Leftrightarrow A_{3n-2}) = \bot \Leftrightarrow \bot = \top$, $I_2(B_{3n}) = I_2(A_{3n-1} \Leftrightarrow B_{3n-1}) = \bot \Leftrightarrow \bot = \top$, $I_2(A_{3n+1}) = I_2(A_{3n} \Leftrightarrow A_{3n-1}) = \top \Leftrightarrow \bot = \bot$, $I_2(B_{3n+1}) = I_2(A_{3n} \Leftrightarrow B_{3n}) = \top \Leftrightarrow \top = \top$, $I_2(A_{3n+2}) = I_2(A_{3n+1} \Leftrightarrow A_{3n}) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$, $I_2(B_{3n+2}) = I_2(A_{3n+1} \Leftrightarrow B_{3n+1}) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$. Тиме смо показали тврђење.

Из претходног видимо да су формуле A_{3n+2}, $n \in \mathbb{N}$ контрадикције, формуле B_{3n+1}, $n \in \mathbb{N}$ таутологије, а све остале нису ни таутологије ни контрадикције. $\square$

2 Доказати да у исказном рачуну важи:

$$\vdash (A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C)).$$

Решење: Заменом формула добијамо формулу $\vdash (A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C))$. Показаћемо $A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow \neg C)$, A, $\neg B \vdash C$, а резултат ће следити троструком применом става дедукције.

1.	Хипотеза	$A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow \neg C)$
2.	Хипотеза	A
3.	Хипотеза	$\neg B$
4.	МП(1,2)	$\neg(B \Rightarrow \neg C)$
5.	Теорема	$\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$
6.	Теорема	$(\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg\neg B)$
7.	МП(5,6)	$\neg(B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg\neg B$
8.	МП(4,7)	$\neg\neg B$
9.	Теорема	$\neg\neg B \Rightarrow B$
10.	МП(8,9)	B
11.	$A,\ \neg A \vdash B \mid (3,10)$	C

$\square$

3 Показати да у произвољној Буловој алгебри, за произвољне x, y важи:

$$x = 0 \text{ ако и сам ако } x \wedge y = x \wedge y'.$$

Решење: $(\Rightarrow)$ $0 \wedge y = 0 \wedge y'$, тј. $0 = 0$, што је тачно.

$(\Leftarrow)$ Имамо најпре $x \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = (x \wedge y) \wedge y = (x \wedge y') \wedge y = x \wedge (y' \wedge y) = x \wedge 0 = 0$. Дакле $x \wedge y = x \wedge y' = 0$. Сада добијамо $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = 0 \vee 0 = 0$. $\square$

4 За формулу $\forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z)))$ одредити:

(а) Контрамодел коначног домена.

(б) Произвољан модел.

Решење: (а) Нека је скуп $D_1 = \{\alpha, \beta\}$. Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_1 = (D_1, I^L)$, где је $I^L(f) = f_I$, $I^L(p) = p_I$, $I^L(c) = c_I$ дато са:

p_I	α	β
α	$\top$	
β		$\bot$

f_I	α	β
α	β	
β		

$c_I = \beta$.[1]

Покажимо да је $D_1 \not\models F$, где је F наша формула. Претпоставимо супротно да за све валуације $v : Var \to D_1$ важи $I_v(F) = \top$. Тада за све валуације $u \sim_x v$ важи $I_u(\forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z)))) = \top$. Узмимо да је $u(x) = \alpha$. Даље је за све валуације $w \sim_y u$, $I_w(\forall z((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z)))) = \top$. Јасно је $w(x) = u(x) = \alpha$, а узмимо $w(y) = \alpha$. И коначно је за све валуације $t \sim_z w$, $I_t((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z))) = \top$. $t(x) = w(x) = \alpha$, $t(y) = w(y) = \alpha$, а узмимо $t(z) = \alpha$. Имамо: $(p_I(\alpha,\alpha) \wedge p_I(\alpha,\alpha)) \Rightarrow p_I(c_I, f_I(\alpha,\alpha)) = \top$, тј. $(p_I(\alpha,\alpha) \wedge p_I(\alpha,\alpha)) \Rightarrow p_I(\beta,\beta) = \top$. Одатле добијамо $(\top \wedge \top) \Rightarrow \bot = \top$, тј. $\top \Rightarrow \bot = \top$, што је контрадикција. Следи, $\mathbb{D}_1 \not\models F$.

(б) Пошто се тражи произвољан модел, конструишимо рецимо коначан, и то над доменом $D_2 = \{\alpha\}$. Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_2 = (D_2, I^L)$, где је $I^L(f) = f_I$, $I^L(p) = p_I$, $I^L(c) = c_I$ дато са:

$$f_I(\alpha,\alpha) = \alpha, \;\; p_I(\alpha,\alpha) = \top, \;\; c_I = \alpha.$$

Покажимо да је $D_2 \models F$. Претпоставимо супротно да постоји валуација $v : Var \to D_2$ за коју важи $I_v(F) = \bot$. Тада постоји валуација $u \sim_x v$ за коју је $I_u(\forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z)))) = \bot$. Мора бити $u(x) = \alpha$. Даље, постоји валуација $w \sim_y u$, $I_w(\forall z((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z)))) = \bot$. Јасно је $w(x) = u(x) = \alpha$, а мора бити $w(y) = \alpha$. И коначно постоји валуација $t \sim_z w$, $I_t((p(x,y) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(c, f(y,z))) = \bot$. $t(x) = w(x) = \alpha$, $t(y) = w(y) = \alpha$, а мора бити $t(z) = \alpha$. Имамо: $(p_I(\alpha,\alpha) \wedge p_I(\alpha,\alpha)) \Rightarrow p_I(c_I, f_I(\alpha,\alpha)) = \bot$, тј. $(p_I(\alpha,\alpha) \wedge p_I(\alpha,\alpha)) \Rightarrow p_I(\alpha,\alpha) = \bot$. Одатле добијамо $(\top \wedge \top) \Rightarrow \top = \bot$, тј. $\top \Rightarrow \top = \bot$, што је контрадикција. Следи, $\mathbb{D}_2 \models F$. $\square$

5 Методом таблоа доказати да је формула $(H \wedge K) \Rightarrow L$ ваљана, где је:

$$\begin{array}{l} H = \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (q(x,z,y) \vee r(x,z,y))), \\ K = \exists x \exists y \forall z \neg r(x,z,y), \\ L = \forall x \forall y p(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y \exists z q(x,z,y). \end{array}$$

Решење:

$$\begin{array}{c}
1\ \mathcal{F} H \wedge K \Rightarrow L \\
2(1)\ \mathcal{T} H \wedge K \\
3(1)\ \mathcal{F} L \\
4(2)\ \mathcal{T} H \\
5(2)\ \mathcal{T} K \\
6(3)\ \mathcal{T} \forall x \forall y p(x,y) \\
7(3)\ \mathcal{F} \exists x \exists y \exists z q(x,z,y) \\
8(5)\ \mathcal{T} \exists y \forall z \neg r(a,z,y) \\
9(8)\ \mathcal{T} \forall z \neg r(a,z,b) \\
10(4)\ \mathcal{T} \forall y (p(a,y) \Rightarrow \exists z (q(a,z,y) \vee r(a,z,y))) \\
11(10)\ \mathcal{T} p(a,b) \Rightarrow \exists z (q(a,z,b) \vee r(a,z,b))
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
12(11)\ \mathcal{F} p(a,b) \\
14(6)\ \mathcal{T} \forall y p(a,y) \\
15(14)\ \mathcal{T} p(a,b) \\
\times(12,15)
\end{array}
&
\begin{array}{c}
13(11)\ \mathcal{T} \exists z (q(a,z,b) \vee r(a,z,b)) \\
16(13)\ \mathcal{T} q(a,c,b) \vee r(a,c,b) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
17(16)\ \mathcal{T} q(a,c,b) \\
19(7)\ \mathcal{F} \exists y \exists z q(a,z,y) \\
20(19)\ \mathcal{F} \exists z q(a,z,b) \\
21(20)\ \mathcal{F} q(a,c,b) \\
\times(17,21)
\end{array}
&
\begin{array}{c}
18(16)\ \mathcal{T} r(a,c,b) \\
22(9)\ \mathcal{T} \neg r(a,c,b) \\
23(22)\ \mathcal{F} r(a,c,b) \\
\times(18,23)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Како су све гране таблоа затворене, то је формула ваљана. $\square$

[1] Остали уноси у табелама нису битни, али свакако треба да постоје због комплетности структуре.

6 Методом резолуције доказати да је формула ваљана:

$$(\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists z q(x,z).$$

Решење: Нека је $F = (\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists z q(x,z)$. Тражимо пренекс нормалну форму за $\neg F$.

$\neg F = \neg[(\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists z q(x,z)] =$
$= \neg[\neg(\forall x \exists y (\neg p(x,y) \vee \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \vee \forall x \exists z q(x,z)] =$
$= (\forall x \exists y (\neg p(x,y) \vee \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \wedge \exists x \forall z \neg q(x,z) =$
$= \exists x [\forall x (\exists y \exists z (\neg p(x,y) \vee q(x,z)) \wedge \forall y p(x,y)) \wedge \forall z \neg q(x,z)] =$
$= \exists x [\forall t (\exists y \exists z (\neg p(t,y) \vee q(t,z)) \wedge \forall y p(t,y)) \wedge \forall t \neg q(x,t)] =$
$= \exists x \forall t [\exists y \exists z (\neg p(t,y) \vee q(t,z)) \wedge \forall y p(t,y) \wedge \neg q(x,t)] =$
$= \exists x \forall t \exists y \exists z [(\neg p(t,y) \vee q(t,z)) \wedge \forall u p(t,u) \wedge \neg q(x,t)] =$
$= \exists x \forall t \exists y \exists z \forall u [(\neg p(t,y) \vee q(t,z)) \wedge p(t,u) \wedge \neg q(x,t)].$

После сколемизације: $x \mapsto a,\ y \mapsto f(t),\ z \mapsto g(t)$ добијамо клаузну форму:

$$K = \forall t \forall u [(\neg p(t,f(t)) \vee q(t,g(t))) \wedge p(t,u) \wedge \neg q(a,t)],$$

за коју показујемо да је незадовољива методом резолуције.

$C_1 = \{\neg p(t_1, f(t_1)), q(t_1, g(t_1))\}$		
$C_2 = \{p(t_2, u_2)\}$		
$C_3 = \{\neg q(a, t_3)\}$		
$C_4 = \{q(t_4, g(t_4))\}$	$Res(C_1, C_2, 1, 1)$	$[t_2 \mapsto t_1,\ u_2 \mapsto f(t_1),\ t_1 \mapsto t_4]$
$C_5 = \emptyset$	$Res(C_3, C_4, 1, 1)$	$[t_4 \mapsto a,\ t_3 \mapsto g(a)]$

Како смо добили празну клаузу, то је клаузна форма K формуле $\neg F$ незадовољива, па је и $\neg F$ незадовољива, одакле је F ваљана. $\square$

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko