Увод у математичку логику (А), I и II ток, Јануар 2011. *19. јануар 2011.*

1. Доказати да за свака три скупа A, B и C важи: $A \cup B = A \cup C$ ако и само ако $B - A = C - A$.
2. На скупу $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ дефинисана је релација $\prec$ са: $(a, b) \prec (x, y)$ ако и само ако $a \geq x$ и $b \mid y$. Доказати да је $\prec$ релација поретка и одредити, ако постоје, минималне, максималне, најмањи и највећи елемент.
3. Ако у Буловој алгебри важи $(x \wedge y)' = x' \vee z'$ и $x' \wedge y' = (x \vee z)'$, доказати да је $y = z$.
4. Доказати да у Хилбертовом исказном рачуну важи: $A \wedge B, \neg B \vdash \neg A$.
5. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\mathrm{Const}\,\mathcal{L} = \{c\}$, $\mathrm{Fun}\,\mathcal{L} = \{f, g\}$, $\mathrm{Rel}\,\mathcal{L} = \{p, q\}$, $\mathrm{ar}(f) = \mathrm{ar}(q) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = \mathrm{ar}(p) = 2$.

   Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $c^{\mathbb{M}} = 2$, $f^{\mathbb{M}}(m) = 3m + 1$, $g^{\mathbb{M}}(m, n) = mn + 1$, $p^{\mathbb{M}} =$ „$\leq$”, $q^{\mathbb{M}} =$ „је прост”.

   Дата је валуација $v : \mathrm{Var} \to \mathsf{N}$: $v = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 1 & 4 & \cdots \end{pmatrix}$.

   а) Одредити вредности следећих терма у валуацији v: $g(f(c), f(y))$, $f(g(f(y), f(x)))$.

   б) Одредити тачност следећих формула у валуацији v: $p(x, g(c, y)) \Rightarrow q(c)$, $\exists x\, p(x, g(x, y))$, $\exists x\, \forall y\, p(f(x), g(c, y))$.

   в) Доказати: $\mathbb{M} \vDash \forall y \left(p(c, f(y)) \vee \exists x\, \neg p(x, g(x, y))\right)$.

   г) Доказати: $\mathbb{M} \nvDash \exists y\, q(y) \Rightarrow \forall x \forall y\, q(g(x, y))$.
6. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\forall x \Big(\exists y\, \neg p(x, y) \vee \big(\exists y\, q(a, y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(x))\big)\Big) \Rightarrow \exists x \left(p(a, x) \Rightarrow p(x, f(a))\right) \vee \forall y\, \neg q(a, y).$$

. . . .

T1. Линденбаумова алгебра и филтери (исказни случај). Непротивречне теорије.

T2. Стонова теорема о репрезентацији Булових алгебри.

Увод у математичку логику (Б), I и II ток, Јануар 2011. *19. јануар 2011.*

1. Доказати да за свака три скупа A, B и C важи: $A \cup C = B \cup C$ ако и само ако $A - C = B - C$.
2. На скупу $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ дефинисана је релација $\prec$ са: $(a, b) \prec (x, y)$ ако и само ако $a \leq x$ и $b \mid y$. Доказати да је $\prec$ релација поретка и одредити, ако постоје, минималне, максималне, најмањи и највећи елемент.
3. Ако у Буловој алгебри важи $(x \vee y)' = x' \wedge z'$ и $x' \vee y' = (x \wedge z)'$, доказати да је $y = z$.
4. Доказати да у Хилбертовом исказном рачуну важи: $A \wedge B, \neg A \vdash \neg B$.
5. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\mathrm{Const}\,\mathcal{L} = \{c\}$, $\mathrm{Fun}\,\mathcal{L} = \{f, g\}$, $\mathrm{Rel}\,\mathcal{L} = \{p, q\}$, $\mathrm{ar}(f) = \mathrm{ar}(q) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = \mathrm{ar}(p) = 2$.

   Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $c^{\mathbb{M}} = 3$, $f^{\mathbb{M}}(m) = 2m + 1$, $g^{\mathbb{M}}(m, n) = mn + 1$, $p^{\mathbb{M}} =$ „$\leq$”, $q^{\mathbb{M}} =$ „је прост”.

   Дата је валуација $v : \mathrm{Var} \to \mathsf{N}$: $v = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 4 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$.

   а) Одредити вредности следећих терма у валуацији v: $g(f(c), f(y))$, $f(g(f(y), f(x)))$.

   б) Одредити тачност следећих формула у валуацији v: $p(x, g(c, y)) \Rightarrow q(c)$, $\exists x\, p(x, g(x, y))$, $\exists x\, \forall y\, p(f(x), g(c, y))$.

   в) Доказати: $\mathbb{M} \vDash \forall y \left(p(c, f(y)) \vee \exists x\, \neg p(x, g(x, y))\right)$.

   г) Доказати: $\mathbb{M} \nvDash \exists y\, q(y) \Rightarrow \forall x \forall y\, q(g(x, y))$.
6. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\forall x \Big(\exists y\, \neg p(x, y) \vee \big(\exists y\, q(a, y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(x))\big)\Big) \Rightarrow \exists x \left(p(a, x) \Rightarrow p(x, f(a))\right) \vee \forall y\, \neg q(a, y).$$

. . . .

T1. Линденбаумова алгебра и филтери (исказни случај). Непротивречне теорије.

T2. Стонова теорема о репрезентацији Булових алгебри.