Увод у математичку логику, Јануар 2013. (А) <u>*I и IV ток*</u> *20. јануар 2013.*

1. Одредити све нееквивалентне исказне формуле A у којима се јављају слова p, q, r такве да је формула $F = (p \Rightarrow A) \wedge (q \Rightarrow A) \wedge (r \Rightarrow A)$ таутологија.

Решење. Напишимо таблицу формуле F:

p	q	r	A	$B = p \Rightarrow A$	$C = q \Rightarrow A$	$D = r \Rightarrow A$	$F = B \wedge C \wedge D$
0	0	0	a_1	1	1	1	1
0	0	1	a_2	1	1	a_2	a_2
0	1	0	a_3	1	a_3	1	a_3
0	1	1	a_4	1	a_4	a_4	a_4
1	0	0	a_5	a_5	1	1	a_5
1	0	1	a_6	a_6	1	a_6	a_6
1	1	0	a_7	a_7	a_7	1	a_7
1	1	1	a_8	a_8	a_8	a_8	a_8

Формула F је таутологија ако и само ако је $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$, $a_1 \in \{0, 1\}$. Према томе имамо две нееквивалентне формуле A_1 и A_2 које задовољавају дати услов, и задате су таблицама:

p	q	r	A_1	A_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Можемо да узмемо $A_1 = p \vee q \vee r$ и $A_2 = p \vee \neg p$. ∎

2. Методом резолуције доказати да је формула
$F = [(q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)]$ таутологија.

Решење. Запишимо формулу $\neg F$ у КНФу:

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv [(q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge \neg[(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)] \\
&\equiv (\neg q \vee s) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \Rightarrow q \vee r) \wedge \neg(p \Rightarrow s) \\
&\equiv (\neg q \vee s) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge p \wedge \neg s
\end{aligned}$$

Имамо 5 клауза. Докажимо $\emptyset$:

$$\begin{array}{ll}
C_1 = \{\neg q, s\} & \\
C_2 = \{\neg r, s\} & \\
C_3 = \{\neg p, q, r\} & \\
C_4 = \{p\} & \\
C_5 = \{\neg s\} & \\
\hline
C_6 = \{\neg q\} & Res(C_1, C_5; s, \neg s) \\
C_7 = \{\neg r\} & Res(C_2, C_5; s, \neg s) \\
C_8 = \{q, r\} & Res(C_3, C_4; \neg p, p) \\
C_9 = \{r\} & Res(C_6, C_8; \neg q, q) \\
C_{10} = \emptyset & Res(C_7, C_9; \neg r, r)
\end{array}$$

Одавсде је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. ∎

3. Доказати да у Буловој алгебри важи: $x = 1$ ако и само ако $y = (x \vee y') \wedge (x' \vee y)$.

Решење. Смер ($\Rightarrow$) је тривијалан, јер ако је $x = 1$, тада је $(x \vee y') \wedge (x' \vee y) = (1 \vee y') \wedge (y \vee 0) = 1 \wedge y = y$.

($\Leftarrow$) Нека је $y = (x \vee y') \wedge (x' \vee y)$. Тада је:

$$y = y \wedge y = (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge y = (x \vee y') \wedge y = (x \wedge y) \vee (y' \wedge y) = x \wedge y,$$

па је $x \vee y = x \vee (x \wedge y) = x$. А са друге стране је:

$$x \vee y = x \vee [(x \vee y') \wedge (x' \vee y)] = (x \vee x \vee y') \wedge (x \vee x' \vee y) = (x \vee y') \wedge 1 = x \vee y'.$$

Одавде је $x \vee y \vee y = x \vee y' \vee y = 1$, тј. $x \vee y = 1$, па коначно имамо $x = x \vee y = 1$. ■

4. Наћи контрамодел за формулу $\forall x\,(\forall y\,p(x, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, x))$.

Решење. Уочимо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}})$, где је $p^{\mathbb{K}}$ предикат дат таблицом:

$$\begin{array}{c|cc} p^{\mathbb{K}} & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & 1 & 1 \\ \beta & 0 & \star \end{array}.$$

Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models \forall x\,(\forall y\,p(x, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, x))$. Претпоставимо супротно да је $\mathbb{K} \models \forall x\,(\forall y\,p(x, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, x))$. Тада за све валуације $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ важи $\forall x\,(\forall y\,p(x, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, x)) =_v 1$. Тада за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $\forall y\,p(\underline{d}, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, \underline{d}) =_v 1$; специјално за $d = \alpha$ имамо $\forall y\,p(\underline{\alpha}, y) \Rightarrow \forall y\,p(y, \underline{\alpha}) =_v 1$. Приметимо како је $p^{\mathbb{K}}(\beta, \alpha) = 0$, то је $p(\underline{\beta}, \underline{\alpha}) =_v 0$, одакле је $\forall y\,p(y, \underline{\alpha}) =_v 0$. Дакле, $\forall y\,p(\underline{\alpha}, y) =_v 0$, одакле за све $e \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p(\underline{\alpha}, \underline{e}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{K}}(\alpha, e) = 0$. Али како $e \in \{\alpha, \beta\}$, ово је контрадикција. ■

6. По дефиницији доказати да је формула $\forall x\,\forall y\,\exists z\,[p(x) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow p(z))]$ ваљана.

Решење. Претпоставимо супротно да $\not\models \forall x\,\forall y\,\exists z\,[p(x) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow p(z))]$, и нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}) \not\models \forall x\,\forall y\,\exists z\,[p(x) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow p(z))]$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $\forall x\,\forall y\,\exists z\,[p(x) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow p(z))] =_v 0$.

Тада постоји елемент $a \in D$ такав да $\forall y\,\exists z\,[p(\underline{a}) \Rightarrow (q(y) \Rightarrow p(z))] =_v 0$. Одавде следи да постоји елемент $b \in D$ такав да је $\exists z\,[p(\underline{a}) \Rightarrow (q(\underline{b}) \Rightarrow p(z))] =_v 0$. Даље закључујемо да за све елементе $d \in D$ важи $p(\underline{a}) \Rightarrow (q(\underline{b}) \Rightarrow p(\underline{d})) =_v 0$; специјално за $d = a$ имамо $p(\underline{a}) \Rightarrow (q(\underline{b}) \Rightarrow p(\underline{a})) =_v 0$. Сада је $p(\underline{a}) =_v 1$ и $q(\underline{b}) \Rightarrow p(\underline{a}) =_v 0$, одакле је $q(\underline{b}) =_v 1$ и $p(\underline{a}) =_v 0$. Контрадикција. ■

5. Методом таблоа доказати да је формула
$[\exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))] \Rightarrow [\exists x\, \exists y\,(q(x) \wedge r(x,y)) \vee \exists x\, \neg p(x)]$ ваљана.

Решење. $0.\, \mathcal{F}\, [\exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))] \Rightarrow [\exists x\, \exists y\,(q(x) \wedge r(x,y)) \vee \exists x\, \neg p(x)]$

$1(0)\, \mathcal{T}\, \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))$

$2(0)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \exists y\,(q(x) \wedge r(x,y)) \vee \exists x\, \neg p(x)$

$3(1)\, \mathcal{T}\, \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x))$

$4^\star(1)\, \mathcal{T}\, \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))$

$5^\star(2)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \exists y\,(q(x) \wedge r(x,y))$

$6^\star(2)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \neg p(x)$

$7(3)\, \mathcal{T}\, p(a) \Rightarrow q(a)$

$8(4)\, \mathcal{T}\, p(a) \Rightarrow \exists y\, r(a,y)$

$9^\star(5)\, \mathcal{F}\, \exists x\,(q(a) \wedge r(a,y))$

$10(6)\, \mathcal{F}\, \neg p(a)$

$11(10)\, \mathcal{T}\, p(a)$

- $12(7)\, \mathcal{F}\, p(a)$
  - $\times(11,12)$
- $13(7)\, \mathcal{T}\, q(a)$
  - $14(8)\, \mathcal{F}\, p(a)$
    - $\times(11,14)$
  - $15(8)\, \mathcal{T}\, \exists y\, r(a,y)$
    - $16(15)\, \mathcal{T}\, r(a,b)$
    - $17(9)\, \mathcal{F}\, q(a) \wedge r(a,b)$
      - $18(17)\, \mathcal{F}\, q(a)$
        - $\times(13,18)$
      - $19(17)\, \mathcal{F}\, r(a,b)$
        - $\times(16,19)$

■

Студенти који полажу цео испит раде задатке: 1, 2, 3, 4. и 5.

Студенти који полажу други део раде задатке: 3, 4, 5. и 6.

1. Одредити све нееквивалентне исказне формуле A у којима се јављају слова p, q, r такве да је формула $F = (A \Rightarrow p) \wedge (A \Rightarrow q) \wedge (A \Rightarrow r)$ таутологија.

Решење. Напишимо таблицу формуле F:

p	q	r	A	$B = A \Rightarrow p$	$C = A \Rightarrow q$	$D = A \Rightarrow r$	$F = B \wedge C \wedge D$
0	0	0	a_1	$\neg a_1$	$\neg a_1$	$\neg a_1$	$\neg a_1$
0	0	1	a_2	$\neg a_2$	$\neg a_2$	1	$\neg a_2$
0	1	0	a_3	$\neg a_3$	1	$\neg a_3$	$\neg a_3$
0	1	1	a_4	$\neg a_4$	1	1	$\neg a_4$
1	0	0	a_5	1	$\neg a_5$	$\neg a_5$	$\neg a_5$
1	0	1	a_6	1	$\neg a_6$	1	$\neg a_6$
1	1	0	a_7	1	1	$\neg a_7$	$\neg a_7$
1	1	1	a_8	1	1	1	1

Формула F је таутологија ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, $a_8 \in \{0, 1\}$. Према томе имамо две нееквивалентне формуле A_1 и A_2 које задовољавају дати услов, и задате су таблицама:

p	q	r	A_1	A_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Можемо да узмемо $A_1 = p \wedge \neg p$ и $A_2 = p \wedge q \wedge r$. ■

2. Методом резолуције доказати да је формула
$F = [(s \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (s \Rightarrow r)]$ таутологија.

Решење. Запишимо формулу $\neg F$ у КНФу:

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv [(s \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q)] \wedge \neg[(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (s \Rightarrow r)] \\
&\equiv (\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (p \wedge q \Rightarrow r) \wedge \neg(s \Rightarrow r) \\
&\equiv (\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge s \wedge \neg r \\
&\equiv (\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge s \wedge \neg r
\end{aligned}$$

Имамо 5 клауза. Докажимо $\emptyset$:

$$\begin{array}{ll}
C_1 = \{\neg s, p\} & \\
C_2 = \{\neg s, q\} & \\
C_3 = \{\neg p, \neg q, r\} & \\
C_4 = \{s\} & \\
C_5 = \{\neg r\} & \\
\hline
C_6 = \{p\} & Res(C_1, C_4; \neg s, s) \\
C_7 = \{q\} & Res(C_2, C_4; \neg s, s) \\
C_8 = \{\neg p, \neg q\} & Res(C_3, C_5; r, \neg r) \\
C_9 = \{\neg q\} & Res(C_6, C_8; p, \neg p) \\
C_{10} = \emptyset & Res(C_7, C_9; q, \neg q)
\end{array}$$

Одавде је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. ■

3. Доказати да у Буловој алгебри важи: $x = 0$ ако и само ако $y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$.

Решење. Смер ($\Rightarrow$) је тривијалан, јер ако је $x = 0$, тада је $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (0 \wedge y') \vee (y \wedge 1) = 0 \vee y = y$.

($\Leftarrow$) Нека је $y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$. Тада је:

$$y = y \vee y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee y = (x \wedge y') \vee y = (x \vee y) \wedge (y' \vee y) = x \vee y,$$

па је $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$. А са друге стране је:

$$x \wedge y = x \wedge [(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)] = (x \wedge x \wedge y') \vee (x \wedge x' \wedge y) = (x \wedge y') \vee 0 = x \wedge y'.$$

Одавде је $x \wedge y \wedge y = x \wedge y' \wedge y = 0$, тј. $x \wedge y = 1$, па коначно имамо $x = x \wedge y = 0$. ∎

4. Наћи модел за формулу $\exists x\, (\forall y\, p(x, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, x))$.

Решење. Уочимо модел $\mathbb{M} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}})$, где је $p^{\mathbb{M}}$ предикат дат таблицом:

$p^{\mathbb{M}}$	α	β
α	1	1
β	0	$\star$

Докажимо да је $\mathbb{M} \models \exists x\, (\forall y\, p(x, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, x))$. Претпоставимо супротно да је $\mathbb{M} \not\models \exists x\, (\forall y\, p(x, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, x))$. Тада постоји валуација $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ важи $\exists x\, (\forall y\, p(x, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, x)) =_v 0$. Тада за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $\forall y\, p(\underline{d}, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, \underline{d}) =_v 0$; специјално за $d = \alpha$ имамо $\forall y\, p(\underline{\alpha}, y) \wedge \exists y\, \neg p(y, \underline{\alpha}) =_v 0$. Приметимо како је $p^{\mathbb{M}}(\beta, \alpha) = 0$, то је $\neg p(\underline{\beta}, \underline{\alpha}) =_v 1$, одакле је $\exists y\, \neg p(y, \underline{\alpha}) =_v 1$. Дакле, $\forall y\, p(\underline{\alpha}, y) =_v 0$, одакле за све $e \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p(\underline{\alpha}, \underline{e}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{M}}(\alpha, e) = 0$. Али како $e \in \{\alpha, \beta\}$, ово је контрадикција. ∎

6. По дефиницији доказати да је формула $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x) \Rightarrow (\neg p(y) \Rightarrow q(z))]$ ваљана.

Решење. Претпоставимо супротно да $\not\models \forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x) \Rightarrow (\neg p(y) \Rightarrow q(z))]$, и нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}) \not\models \forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x) \Rightarrow (\neg p(y) \Rightarrow q(z))]$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x) \Rightarrow (\neg p(y) \Rightarrow q(z))] =_v 0$.

Тада постоји елемент $a \in D$ такав да $\exists y\, \forall z\, [p(\underline{a}) \Rightarrow (\neg p(y) \Rightarrow q(z))] =_v 0$. Одавде следи да за све елементе $d \in D$ важи $\forall z\, [p(\underline{a}) \Rightarrow (\neg p(\underline{d}) \Rightarrow q(z))] =_v 0$; специјално за $d = a$ имамо $\forall z\, [p(\underline{a}) \Rightarrow (\neg p(\underline{a}) \Rightarrow q(z))] =_v 0$. Даље закључујемо да постоји елемент $b \in D$ такав да $p(\underline{a}) \Rightarrow (\neg p(\underline{a}) \Rightarrow q(\underline{b})) =_v 0$. Сада је $p(\underline{a}) =_v 1$ и $\neg p(\underline{a}) \Rightarrow q(\underline{b}) =_v 0$, одакле је $\neg p(\underline{a}) =_v 1$ и $q(\underline{b}) =_v 0$. Контрадикција. ∎

5. Методом таблоа доказати да је формула
$[\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \land \exists x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))] \Rightarrow [\exists x\, \exists y\,(q(x) \land r(x,y)) \lor \exists x\, \neg p(x)]$ ваљана.

Решење. $0.\, \mathcal{F}\, [\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \land \exists x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))] \Rightarrow [\exists x\, \exists y\,(q(x) \land r(x,y)) \lor \exists x\, \neg p(x)]$

$1(0)\, \mathcal{T}\, \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \land \exists x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))$

$2(0)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \exists y\,(q(x) \land r(x,y)) \lor \exists x\, \neg p(x)$

$3^\star(1)\, \mathcal{T}\, \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x))$

$4(1)\, \mathcal{T}\, \exists x\,(p(x) \Rightarrow \exists y\, r(x,y))$

$5^\star(2)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \exists y\,(q(x) \land r(x,y))$

$6^\star(2)\, \mathcal{F}\, \exists x\, \neg p(x)$

$7(4)\, \mathcal{T}\, p(a) \Rightarrow \exists y\, r(a,y)$

$8(3)\, \mathcal{T}\, p(a) \Rightarrow q(a)$

$9^\star(5)\, \mathcal{F}\, \exists x\,(q(a) \land r(a,y))$

$10(6)\, \mathcal{F}\, \neg p(a)$

$11(10)\, \mathcal{T}\, p(a)$

- $12(7)\, \mathcal{F}\, p(a)$
  - $\times(11, 12)$
- $13(7)\, \mathcal{T}\, \exists y\, r(a,y)$
  - $14(13)\, \mathcal{T}\, r(a,b)$
  - $15(9)\, \mathcal{F}\, q(a) \land r(a,b)$
    - $16(8)\, \mathcal{F}\, p(a)$
      - $\times(11, 16)$
    - $17(8)\, \mathcal{T}\, q(a)$
      - $18(15)\, \mathcal{F}\, q(a)$
        - $\times(17, 18)$
      - $19(15)\, \mathcal{F}\, r(a,b)$
        - $\times(14, 19)$

$\blacksquare$

Студенти који полажу цео испит раде задатке: 1, 2, 3, 4. и 5.

Студенти који полажу други део раде задатке: 3, 4, 5. и 6.