Увод у математичку логику, Јануар 2015. *24. јануар 2015.*

1. На Острву верника и неверника (верници увек говоре истину, неверници увек лажу) у току је велики фестивал пива. Традиционално на фестивалу су организована такмичења у две дисциплине: Брзо испијање кригле и Ко више попије у минути. Такмичар A се такмичи у тачно једној дисциплини. Он и његови пријатељи B, C, D и E су дали следеће изјаве:

A: Ако је B верник, онда је и C верник.

B: Ако је C верник, онда се A такмичи у Брзом испијању кригле.

C: A је неверник или се такмичи у Ко више попије у минути.

D: B може да изјави да се A такмичи у Брзом испијању кригле.

E: Ако се A такмичи у Брзом испијању кригле, онда је C неверник.

Шта можемо да закључимо?

Решење. Означимо са a (b, c, d, e) изказе "A (B, C, D, E) је верник.". Означимо са p исказ "A се такмичи у Брзом испијању кригле.". Тада према поставци задатка $\neg p$ значи "A се такмичи у Ко више попије у минути.". Из исказа закључујемо:

$$a \Leftrightarrow (b \Rightarrow c) = 1 \tag{1}$$

$$b \Leftrightarrow (c \Rightarrow p) = 1 \tag{2}$$

$$c \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg p) = 1 \tag{3}$$

$$d \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow p) = 1 \tag{4}$$

$$e \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg c) = 1 \tag{5}$$

Коментаришемо по слову a. Ако је $a = 0$, тада из (1) $b \Rightarrow c = 0$, тј. $b = 1$ и $c = 0$. Сада (3) постаје $1 = 0 \Leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg p) = 0 \Leftrightarrow (1 \vee \neg p) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, што је контрадикција.

Дакле, $\boxed{a = 1}$. Из (3) је $1 = c \Leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg p) = c \Leftrightarrow (0 \vee \neg p) = c \Leftrightarrow \neg p$, одакле је $\boxed{c = \neg p}$. Сада (5) постаје $1 = e \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg\neg p) = e \Leftrightarrow 1$, тј. $\boxed{e = 1}$. Такође, (2) постаје $1 = b \Leftrightarrow (c \Rightarrow \neg c) = b \Leftrightarrow \neg c$, одакле је $\boxed{b = \neg c}$. Према (1) је $1 = 1 \Leftrightarrow (b \Rightarrow \neg b) = 1 \Leftrightarrow \neg b$, одакле је $\boxed{b = 0}$, па је $\boxed{c = 1}$ и $\boxed{p = 0}$. Коначно из (4) је $1 = d \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 0) = d \Leftrightarrow 1$, тј. $\boxed{d = 1}$.

Према томе, A, C, D, E верници, B неверник и A се такмичи у Ко више попије у минути. ⊣

2. Доказати скуповни идентитет: $A \smallsetminus (B \smallsetminus C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap C)$.

Решење. Рачуном карактеристичних функција добијамо:

$$\chi_{A \smallsetminus (B \smallsetminus C)} = \chi_A + \chi_A \chi_{B \smallsetminus C} = \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C) = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C \quad \text{и}$$

$$\chi_{(A \smallsetminus B) \cup (A \cap C)} = \chi_{A \smallsetminus B} + \chi_{A \cap C} + \chi_{A \smallsetminus B}\chi_{A \cap C} = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_A\chi_C =$$

$$\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C = \chi_A + \chi_A\chi_B + \cancel{\chi_A\chi_C} + \cancel{\chi_A\chi_C} + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.$$

Како су карактеристичне функције једнаке, важи и дати скуповни идентитет. ⊣

3. Нека су $f, g : X \longrightarrow Y$. Доказати да је $f = g$ ако и само ако за све $A \subseteq X$ важи $f^{-1}[g[A]] \supseteq A$.

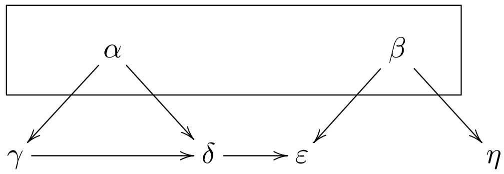
Решење. $\Rightarrow$: Нека је $f = g$. Треба да докажемо да је $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$. Нека $x \in A$. Тада $f(x) \in f[A]$, по дефиницији директне слике, па $x \in f^{-1}[f[A]]$ по дефиницији инверзне.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да за све $A \subseteq X$ важи $f^{-1}[g[A]] \supseteq A$. Нека је $x \in X$ произвољан, доказаћемо да је $f(x) = g(x)$, што повлачи $f = g$. Уочимо једночлан скуп $A = \{x\}$. Тада је $g[A] = \{g(x)\}$. Према услову $A \subseteq f^{-1}[g[A]]$ имамо $x \in f^{-1}[g[A]]$. Према дефиницији инверзне слике $f(x) \in g[A]$, а $g[A] = \{g(x)\}$. Дакле, $f(x) = g(x)$. ⊣

4. Нека су x и y елементи Булове алгебре B. Ако је $x \wedge y \lneq x$, доказати да је $y \lneq x \vee y$.

Решење. Јасно је да је $y \leq x \vee y$ (нпр. због апсорбције је $y \wedge (x \vee y) = y$). Треба још да докажимо $y \neq x \vee y$. Ако претпоставимо супротно да је $y = x \vee y$, тада је $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$, што је у контрадикцији са претпоставком. ⊣

5. На скупу $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$ дефинисан је модел $\mathbb{A}$ језика $\mathcal{L} = \{p, r\}$ ($\operatorname{ar} p = 1, \operatorname{ar} r = 2$), следећом сликом ($p^{\mathbb{A}}$ је представљен правоугаоником, $r^{\mathbb{A}}$ је представљен стрелицама):



Записати формуле $F_a(x)$, за све $a \in A$, такве да $F_a(x)$ дефинише a.

Решење. α је једини елемент у p-у из кога иде стрелица у елемент из кога иде стрелица:

$$F_\alpha(x) = p(x) \wedge \exists y \exists z [r(x, y) \wedge r(y, z)].$$

β је једини елемнт у p-у из кога иде стрелица у елемент из кога не иде стрелица:

$$F_\beta(x) = p(x) \wedge \exists y [r(x, y) \wedge \forall z \neg r(y, z)].$$

γ је једини елемент ван p-а из кога иде стрелица у елемент из кога иде стрелица:

$$F_\gamma(x) = \neg p(x) \wedge \exists y \exists z [r(x, y) \wedge r(y, z)].$$

δ је једини елемент у кога улази стрелица из елемента ван p-а и из кога иде стрелица:

$$F_\delta(x) = \exists y (\neg p(y) \wedge r(y, x)) \wedge \exists y r(x, y).$$

ε је једини елемент у кога улази стрелица из елемента у кога улази стрелица из елемента ван p-а:

$$F_\varepsilon(x) = \exists y \exists z [\neg p(y) \wedge r(y, z) \wedge r(z, x)].$$

η је једини елемент из кога не иде ниједна стрелица и у кога не улази стрелица из елемента ван p-а:

$$F_\eta(x) = \forall y \neg r(x, y) \wedge \forall y (\neg p(y) \Rightarrow \neg r(y, x)).$$

$\dashv$