Увод у математичку логику (1о1 и 1о4), Јануар 2016.

1. **(а)** На Острву верника и неверника, из групе становника A, B, C, D, E и F имамо следеће изјаве:

B: Бар један од E и F је верник.

C: Бар један од D и E је неверник.

D: A је верник, а E неверник.

E: Ако је A верник, онда је и F верник.

F: Ако је A верник, онда је B неверник.

Шта из претходних изјава можемо да закључимо?

(б) Природном дедукцијом доказати: $b \Leftrightarrow e \vee f,\ f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)\ \vdash\ b$.

Решење. **(а)** Означимо са a, b, c, d, e, f редом исказе A, B, C, D, E, F је верник. Имамо:

$$\begin{aligned} b \Leftrightarrow e \vee f &= 1 \quad (1)\\ c \Leftrightarrow \neg d \vee \neg e &= 1 \quad (2)\\ d \Leftrightarrow a \wedge \neg e &= 1 \quad (3)\\ e \Leftrightarrow (a \Rightarrow f) &= 1 \quad (4)\\ f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b) &= 1 \quad (5) \end{aligned}$$

Слово које се највише појављу у претходним једнакостима је e, па ћемо коментарисати по њему.

Ако је $e = 0$, из (4) добијамо да је $a = 1$ и $f = 0$. Из (1) је тада $b = 0$. Сада је $a \Rightarrow \neg b = 1$, а $f = 0$, што је у контрадикцији са (5).

Дакле, $e = 1$. Из (1) следи $b = 1$, а из (3) $d = 0$; директно из (2) следи $c = 1$. Даље имамо је $a \Rightarrow \neg b = a \Rightarrow 0 = \neg a$, па је из (5) $f = \neg a$. Тада је $a \Rightarrow f = a \Rightarrow \neg a = \neg a$, па је из (4) $1 = \neg a$, тј. $a = 0$; одатле директно $f = \neg a = 1$.

Према томе решење је: A и D су неверници, а B, C, E и F су верници.

(б) Извођење је:

1.	$b \Leftrightarrow e \vee f$	пп
2.	$f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)$	пп
3.	$\mid \neg b$	додатна пп
4.	$\mid \mid a$	додатна пп
5.	$\mid \mid \neg b$	слабљење 3
6.	$\mid a \Rightarrow \neg b$	$\Rightarrow_U$ на 4–5
7.	$\mid (a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow f$	$\Leftrightarrow_E$ на 2
8.	$\mid f$	МП на 6 и 7
9.	$\mid e \vee f$	$\vee_U$ на 8
10.	$\mid e \vee f \Rightarrow b$	$\Leftrightarrow_E$ на 1
11.	$\mid b$	МП на 9 и 10
12.	$\mid \perp$	$\neg_E$ на 3 и 11
13.	b	$\perp_c$ на 3–12

$\square$

2. Ако скупови A, B, C задовољавају $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \setminus A$, доказати да је $B \subseteq C \subseteq A \cup B$.

Решење. Претпоставимо да је $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \setminus A$.

Први начин. Докажимо најпре да је $B \subseteq C$. Претпоставимо супротно. Тада постоји x такав да $x \in B$ и $x \notin C$. Посматрајмо два случаја: $x \in A$ и $x \notin A$. Ако $x \in A$, тада $x \notin (B \cup C) \setminus A$, па по претпоставци $x \notin (A \cup C) \cap B$; како $x \in B$ то значи $x \notin A \cup C$, специјално $x \notin A$; контрадикција. Ако $x \notin A$, тада $x \notin A \cup C$ (јер $x \notin C$), па $x \notin (A \cup C) \cap B$; по претпоставци тада $x \notin (B \cup C) \setminus A$, па како $x \in B \cup C$ (јер $x \in B$), добијамо $x \in A$; поново контрадикција. Како ниједан случај није могућ, закључујемо да заиста $B \subseteq C$.

Докажимо сада да је $C \subseteq A \cup B$. Претпоставимо супротно . Тада постоји елемент x такав да $x \in C$ и $x \notin A \cup B$, тј. $x \notin A$ и $x \notin B$. Тада $x \notin (A \cup C) \cap B$, јер $x \notin B$, па по претпоставци $x \notin (B \cup C) \smallsetminus A$. Међутим, $x \in C$ повлачи $x \in B \cup C$, па из $x \notin A$ добијамо $x \in (B \cup C) \smallsetminus A$. Контрадикција. Дакле, важи $C \subseteq A \cup B$.

Други начин. Искористимо карактеристичне функције. Карактеристична функција скупа на левој страни је:

$\chi_{(A \cup C) \cap B} = \chi_{A \cup C} \chi_B = (\chi_A + \chi_C + \chi_A \chi_C)\chi_B = \chi_A \chi_B + \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C$;

а скупа на десној страни је:

$\chi_{(B \cup C) \smallsetminus A} = \chi_{B \cup C} + \chi_{B \cup C} \chi_A = \chi_B + \chi_C + \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C$.

Имамо да је $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \smallsetminus A$ акко $\chi_{(A \cup C) \cap B} = \chi_{(B \cup C) \smallsetminus A}$, тј. како видимо из претходног рачуна акко $\chi_B + \chi_C + \chi_A \chi_C = 0$. Овај услов можемо да запишемо као $\chi_B = \chi_C + \chi_C \chi_A = \chi_{C \smallsetminus A}$. Дакле, полазна претпоставка је еквивалентна са $B = C \smallsetminus A$.

Из $B = C \smallsetminus A$ је очигледно $B \subseteq C$. Такође, $C = (C \smallsetminus A) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A) \subseteq B \cup A = A \cup B$.

Трећи начин. У претходном извођењу смо дошли до тога да је полазна претпоставка еквивалентна $\chi_B = \chi_C + \chi_C \chi_A$.

$B \subseteq C$ акко $B = B \cap C$ акко $\chi_B = \chi_B \chi_C$. Како је $\chi_B \chi_C = (\chi_C + \chi_C \chi_A)\chi_C = \chi_C + \chi_C \chi_A = \chi_B$, то закључујемо да важи $B \subseteq C$.

$C \subseteq A \cup B$ акко $C \cap (A \cup B) = C$ акко $\chi_C \chi_{A \cup B} = \chi_C$ акко $\chi_C \chi_A + \chi_C \chi_B + \chi_C \chi_A \chi_B = \chi_C$. Како је $\chi_C \chi_A + \chi_C \chi_B + \chi_C \chi_A \chi_B = \chi_C \chi_A + \chi_C(\chi_C + \chi_C \chi_A) + \chi_C \chi_A(\chi_C + \chi_C \chi_A) = \chi_C \chi_A + \chi_C + \chi_C \chi_A + \chi_C \chi_A + \chi_C \chi_A = \chi_C$, закључујемо да важи $C \subseteq A \cup B$. $\square$

3. Нека је $f : X \longrightarrow Y$. Доказати да је f 1-1 ако за све једночлане скупове $A \subseteq X$ важи:

$$f[A] \cap f[X \smallsetminus A] = \emptyset.$$

Решење. Претпоставимо супротно, тј. нека f није 1-1. Изаберимо $x_1, x_2 \in X$ такве да $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Уочимо скуп $A = \{x_1\}$. Како $x_2 \neq x_1$, то $x_2 \notin A$, тј. $x_2 \in X \smallsetminus A$.

Имамо да $x_1 \in A$ повлачи $y = f(x_1) \in f[A]$, а $x_2 \in X \smallsetminus A$ повлачи $y = f(x_2) \in f[X \smallsetminus A]$. Дакле, $y \in f[X] \cap f[X \smallsetminus A]$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $f[A] \cap f[X \smallsetminus A] = \emptyset$. $\square$

4. Конструисати бијекцију између скупова:

$$A = \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{и} \qquad B = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Решење. Сетимо се да је са:

$$f(m) = \begin{cases} 2m & m \geq 0 \\ -2m - 1 & m < 0 \end{cases}$$

дата бијекција $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. Са $g(a) = a/2$ је очигледно дата бијекција $g : A \longrightarrow \mathbb{Z}$, а са $h(n) = 2n+1$ бијекција $h : \mathbb{N} \longrightarrow B$. Композиција $h \circ f \circ g : A \longrightarrow B$ је тражена бијекција. Експлицитно, за $a \in A$:

$$a \xrightarrow{g} \frac{a}{2} \xrightarrow{f} \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a - 1 & a < 0 \end{cases} \xrightarrow{h} \begin{cases} 2a + 1 & a \geq 0 \\ -2a - 1 & a < 0 \end{cases}.$$

$\square$

5. **(а)** На слици је дат модел језика $\mathcal{L} = \{q\}$ ($\mathrm{ar}(q) = 2$ и q је представљено стрелицом). За сваки елемент модела одредити формулу која га дефинише.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d] & b \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & c \\ d & e \arrow[r] & f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(б) Који елементи задовољавају следеће формуле?

- $\forall y\, q(x, y)$; • $\exists yz\, (q(y, x) \wedge q(z, y))$; • $\exists yz\, (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge q(y, z))$; • $\exists yz\, (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge \neg q(y, z))$.

Решење. **(а)** Уочимо формулу:

$$\theta(x_1,x_2,x_3,x_4) = q(x_1,x_2) \wedge q(x_2,x_3) \wedge q(x_3,x_4).$$

Она описује следећу ситуацију: $x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4$. Како у моделу постоји само један овакав пут, то елементи x_1,x_2,x_3,x_4 задовољавају $\theta(x_1,x_2,x_3,x_4)$ акко $x_1 = b$, $x_2 = e$, $x_3 = f$ и $x_4 = c$. Према томе b, e, f и c могу бити дефинисани следећим формулама:

$$\phi_b(x) = \exists\, x_2x_3x_4\, \theta(x,x_2,x_3,x_4); \qquad \phi_e(x) = \exists\, x_1x_3x_4\, \theta(x_1,x,x_3,x_4);$$
$$\phi_f(x) = \exists\, x_1x_2x_4\, \theta(x_1,x_2,x,x_4); \qquad \phi_c(x) = \exists\, x_1x_2x_3\, \theta(x_1,x_2,x_3,x).$$

Елементи d и c немају излазну стрелицу, али како смо c већ дефинисали, d можемо дефинисати формулом која каже да нема излазну стрелицу и није једнак c:

$$\phi_d(x) = \neg\exists\, y\, q(x,y) \wedge \neg\phi_c(x).$$

Коначно, један начин да дефинишемо a је да кажемо да није једнак ниједном другом:

$$\phi_a(x) = \neg\phi_b(x) \wedge \neg\phi_c(x) \wedge \neg\phi_d(x) \wedge \neg\phi_e(x) \wedge \neg\phi_f(x).$$

(б) Формула $\forall\, y\, q(x,y)$ каже да из x иде стрелица према свим елементима домена. Једини елемент из кога иде стрелица ка осталим елементима домена је b, али ни из њега не иде стрелица ка њему самом, па закључујемо да ниједан елемент не задовољава дату формулу, тј. дата формула описује $\emptyset$.

Формула $\exists\, y\, z(q(y,x) \wedge q(z,y))$ каже да је x такав елемент да имамо следећи пут: $z \longrightarrow y \longrightarrow x$, тј. x је на крају пута кога чине две стрелице. Са слике видимо да ова формула описује скуп $\{c,d,f\}$ (c због пута $b \longrightarrow f \longrightarrow c$, d због пута $b \longrightarrow a \longrightarrow d$, а f због пута $b \longrightarrow e \longrightarrow f$).

Формула $\exists\, yz\, (q(y,x) \wedge q(z,x) \wedge q(y,z))$ каже да је x такав елемент да имамо следећи троугао:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] \arrow[d] & x \\ z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

На слици имамо три таква троугла:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & d \\ a \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & f \\ e \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & c \\ f \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

па дата формула описује $\{d,c,f\}$.

Коначно, формула $\exists\, yz\, (q(y,x) \wedge q(z,x) \wedge \neg q(y,z))$ каже да је x такав елемент да задовољава:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] \arrow[d, "\times" marking] & x \\ z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Сви елементи који имају улазну стрелицу задовољавају ову слику: ако је x било који елемент који има улазну стрелицу, тада он има улазну стрелицу из b, па x задовољава:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d, "\times" marking] & x \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Такође b не задовољава дату формулу јер нема улазну стрелицу. Према томе, дата формула дефинише $\{a,c,d,e,f\}$. $\square$

6. **[бонус]** Нека је $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такав да за сваке две тачке $A, B \in \mathcal{S}$ важи да је дужина дужи AB рационалан број. Доказати да је $|\mathcal{S}| \leq \aleph_0$.

Решење. Изаберимо две различите тачке $A, B \in \mathcal{S}$. (Ако не постоје, тада је $|\mathcal{S}| \leq 1 < \aleph_0$.) За рационалан број $q \geq 0$, означимо са k_q круг са центром A полупречника q, а са l_q круг са центром B полупречника q. (Круг полупречника 0 је само тачка.)

Уочимо скуп $\mathcal{T} = \bigcup\{k_q \cap l_r \mid q, r \in \mathbb{Q},\ q, r \geq 0\}$. ($\mathcal{T}$ је скуп свих пресечних тачака кругова са центром A рационалног полупречника и кругова са центром B рационалног полупречника.) Како два круга са различитим центрима имају највише две пресечне тачке, и како имамо пребројиво много парова (q, r), где су q, r рационални бројеви, то је $\mathcal{T}$ пребројива унија највише двочланих скупова, па је и $\mathcal{T}$ пребројив скуп.

Довољно је још да приметимо да је $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Заиста, ако $X \in \mathcal{S}$, тада је по претпоставци X на рационалном растојању q од A и на рационалном растојању r од B. Према томе, $X \in k_q \cap l_r$, па $X \in \mathcal{T}$. $\square$