

Увод у математичку логику (1o1 и 1o4), Јануар 2016.

1. (а) На Острву верника и неверника, из групе становника A, B, C, D, E и F имамо следеће изјаве:

B : Бар један од E и F је верник.

C : Бар један од D и E је неверник.

D : A је верник, а E неверник.

E : Ако је A верник, онда је и F верник.

F : Ако је A верник, онда је B неверник.

Шта из претходних изјава можемо да закључимо?

(б) Природном дедукцијом доказати: $b \Leftrightarrow e \vee f, f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b) \vdash b$.

Решење. (а) Означимо са a, b, c, d, e, f редом исказе A, B, C, D, E, F је верник. Имамо:

$$\begin{aligned} b \Leftrightarrow e \vee f &= 1 \quad (1) \\ c \Leftrightarrow \neg d \vee \neg e &= 1 \quad (2) \\ d \Leftrightarrow a \wedge \neg e &= 1 \quad (3) \\ e \Leftrightarrow (a \Rightarrow f) &= 1 \quad (4) \\ f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b) &= 1 \quad (5) \end{aligned}$$

Слово које се највише појављу у претходним једнакостима је e , па ћемо коментарисати по њему.

Ако је $e = 0$, из (4) добијамо да је $a = 1$ и $f = 0$. Из (1) је тада $b = 0$. Сада је $a \Rightarrow \neg b = 1$, а $f = 0$, што је у контрадикцији са (5).

Дакле, $e = 1$. Из (1) следи $b = 1$, а из (3) $d = 0$; директно из (2) следи $c = 1$. Даље имамо је $a \Rightarrow \neg b = a \Rightarrow 0 = \neg a$, па је из (5) $f = \neg a$. Тада је $a \Rightarrow f = a \Rightarrow \neg a = \neg a$, па је из (4) $1 = \neg a$, тј. $a = 0$; одатле директно $f = \neg a = 1$.

Према томе решење је: A и D су неверници, а B, C, E и F су верници.

(б) Извођење је:

- | | | |
|-----|--|--------------------------|
| 1. | $b \Leftrightarrow e \vee f$ | пп |
| 2. | $f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)$ | пп |
| 3. | $\neg b$ | додатна пп |
| 4. | a | додатна пп |
| 5. | $\neg b$ | слабљење 3 |
| 6. | $a \Rightarrow \neg b$ | \Rightarrow_U на 4-5 |
| 7. | $(a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow f$ | \Leftrightarrow_E на 2 |
| 8. | f | МП на 6 и 7 |
| 9. | $e \vee f$ | \vee_U на 8 |
| 10. | $e \vee f \Rightarrow b$ | \Leftrightarrow_E на 1 |
| 11. | b | МП на 9 и 10 |
| 12. | \perp | \neg_E на 3 и 11 |
| 13. | b | \perp_c на 3-12 |

□

2. Ако скупови A, B, C задовољавају $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \setminus A$, доказати да је $B \subseteq C \subseteq A \cup B$.

Решење. Претпоставимо да је $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \setminus A$.

Први начин. Докажимо најпре да је $B \subseteq C$. Претпоставимо супротно. Тада постоји x такав да $x \in B$ и $x \notin C$. Посматрајмо два случаја: $x \in A$ и $x \notin A$. Ако $x \in A$, тада $x \notin (B \cup C) \setminus A$, па по претпоставци $x \notin (A \cup C) \cap B$; како $x \in B$ то значи $x \notin A \cup C$, специјално $x \notin A$; контрадикција. Ако $x \notin A$, тада $x \notin A \cup C$ (јер $x \notin C$), па $x \notin (A \cup C) \cap B$; по претпоставци тада $x \notin (B \cup C) \setminus A$, па како $x \in B \cup C$ (јер $x \in B$), добијамо $x \in A$; поново контрадикција. Како ниједан случај није могућ, закључујемо да заиста $B \subseteq C$.

Докажимо сада да је $C \subseteq A \cup B$. Претпоставимо супротно. Тада постоји елемент x такав да $x \in C$ и $x \notin A \cup B$, тј. $x \notin A$ и $x \notin B$. Тада $x \notin (A \cup C) \cap B$, јер $x \notin B$, па по претпоставци $x \notin (B \cup C) \setminus A$. Међутим, $x \in C$ повлачи $x \in B \cup C$, па из $x \notin A$ добијамо $x \in (B \cup C) \setminus A$. Контрадикција. Дакле, важи $C \subseteq A \cup B$.

Други начин. Искористимо карактеристичне функције. Карактеристична функција скупа на левој страни је:

$$\chi_{(A \cup C) \cap B} = \chi_{A \cup C} \chi_B = (\chi_A + \chi_C + \chi_A \chi_C) \chi_B = \chi_A \chi_B + \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C;$$

а скупа на десној страни је:

$$\chi_{(B \cup C) \setminus A} = \chi_{B \cup C} + \chi_{B \cup C} \chi_A = \chi_B + \chi_C + \chi_B \chi_C + \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C.$$

Имамо да је $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \setminus A$ акко $\chi_{(A \cup C) \cap B} = \chi_{(B \cup C) \setminus A}$, тј. како видимо из претходног рачуна акко $\chi_B + \chi_C + \chi_A \chi_C = 0$. Овај услов можемо да запишемо као $\chi_B = \chi_C + \chi_C \chi_A = \chi_C \setminus A$. Дакле, полазна претпоставка је еквивалентна са $B = C \setminus A$.

Из $B = C \setminus A$ је очигледно $B \subseteq C$. Такође, $C = (C \setminus A) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A) \subseteq B \cup A = A \cup B$.

Трећи начин. У претходном извођењу смо дошли до тога да је полазна претпоставка еквивалентна $\chi_B = \chi_C + \chi_C \chi_A$.

$B \subseteq C$ акко $B = B \cap C$ акко $\chi_B = \chi_B \chi_C$. Како је $\chi_B \chi_C = (\chi_C + \chi_C \chi_A) \chi_C = \chi_C + \chi_C \chi_A = \chi_B$, то закључујемо да важи $B \subseteq C$.

$C \subseteq A \cup B$ акко $C \cap (A \cup B) = C$ акко $\chi_C \chi_{A \cup B} = \chi_C$ акко $\chi_C \chi_A + \chi_C \chi_B + \chi_C \chi_A \chi_B = \chi_C$. Како је $\chi_C \chi_A + \chi_C \chi_B + \chi_C \chi_A \chi_B = \chi_C \chi_A + \chi_C (\chi_C + \chi_C \chi_A) + \chi_C \chi_A (\chi_C + \chi_C \chi_A) = \chi_C \chi_A + \chi_C + \chi_C \chi_A + \chi_C \chi_A + \chi_C \chi_A = \chi_C$, закључујемо да важи $C \subseteq A \cup B$. \square

3. Нека је $f : X \rightarrow Y$. Доказати да је f 1-1 ако за све једночлане скупове $A \subseteq X$ важи:

$$f[A] \cap f[X \setminus A] = \emptyset.$$

Решење. Претпоставимо супротно, тј. нека f није 1-1. Изаберимо $x_1, x_2 \in X$ такве да $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Уочимо скуп $A = \{x_1\}$. Како $x_2 \neq x_1$, то $x_2 \notin A$, тј. $x_2 \in X \setminus A$.

Имамо да $x_1 \in A$ повлачи $y = f(x_1) \in f[A]$, а $x_2 \in X \setminus A$ повлачи $y = f(x_2) \in f[X \setminus A]$. Дакле, $y \in f[A] \cap f[X \setminus A]$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $f[A] \cap f[X \setminus A] = \emptyset$. \square

4. Конструисати бијекцију између скупова:

$$A = \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{и} \quad B = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Решење. Сетимо се да је са:

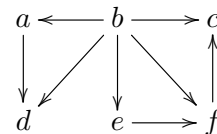
$$f(m) = \begin{cases} 2m & m \geq 0 \\ -2m - 1 & m < 0 \end{cases}$$

дата бијекција $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$. Са $g(a) = a/2$ је очигледно дата бијекција $g : A \rightarrow \mathbb{Z}$, а са $h(n) = 2n + 1$ бијекција $h : \mathbb{N} \rightarrow B$. Композиција $h \circ f \circ g : A \rightarrow B$ је тражена бијекција. Експлицитно, за $a \in A$:

$$a \xrightarrow{g} \frac{a}{2} \xrightarrow{f} \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a - 1 & a < 0 \end{cases} \xrightarrow{h} \begin{cases} 2a + 1 & a \geq 0 \\ -2a - 1 & a < 0 \end{cases}.$$

\square

5. (а) На слици је дат модел језика $\mathcal{L} = \{q\}$ ($\text{ar}(q) = 2$ и q је представљено стрелицом). За сваки елемент модела одредити формулу која га дефинише.



(б) Који елементи задовољавају следеће формуле?

- $\forall y q(x, y)$; • $\exists yz (q(y, x) \wedge q(z, y))$; • $\exists yz (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge q(y, z))$; • $\exists yz (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge \neg q(y, z))$.

Решење. (а) Уочимо формулу:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, x_4) = q(x_1, x_2) \wedge q(x_2, x_3) \wedge q(x_3, x_4).$$

Она описује следећу ситуацију: $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$. Како у моделу постоји само један овакав пут, то елементи x_1, x_2, x_3, x_4 задовољавају $\theta(x_1, x_2, x_3, x_4)$ акко $x_1 = b, x_2 = e, x_3 = f$ и $x_4 = c$. Према томе b, e, f и c могу бити дефинисани следећим формулама:

$$\begin{aligned} \phi_b(x) &= \exists x_2 x_3 x_4 \theta(x, x_2, x_3, x_4); & \phi_e(x) &= \exists x_1 x_3 x_4 \theta(x_1, x, x_3, x_4); \\ \phi_f(x) &= \exists x_1 x_2 x_4 \theta(x_1, x_2, x, x_4); & \phi_c(x) &= \exists x_1 x_2 x_3 \theta(x_1, x_2, x_3, x). \end{aligned}$$

Елементи d и c немају излазну стрелицу, али како смо c већ дефинисали, d можемо дефинисати формулом која каже да нема излазну стрелицу и није једнак c :

$$\phi_d(x) = \neg \exists y q(x, y) \wedge \neg \phi_c(x).$$

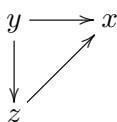
Коначно, један начин да дефинишемо a је да кажемо да није једнак ниједном другом:

$$\phi_a(x) = \neg \phi_b(x) \wedge \neg \phi_c(x) \wedge \neg \phi_d(x) \wedge \neg \phi_e(x) \wedge \neg \phi_f(x).$$

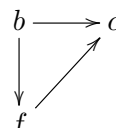
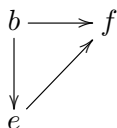
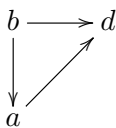
(б) Формула $\forall y q(x, y)$ каже да из x иде стрелица према свим елементима домена. Једини елемент из кога иде стрелица ка осталим елементима домена је b , али ни из њега не иде стрелица ка њему самом, па закључујемо да ниједан елемент не задовољава дату формулу, тј. дата формула описује \emptyset .

Формула $\exists y z (q(y, x) \wedge q(z, y))$ каже да је x такав елемент да имамо следећи пут: $z \rightarrow y \rightarrow x$, тј. x је на крају пута кога чине две стрелице. Са слике видимо да ова формула описује скуп $\{c, d, f\}$ (c због пута $b \rightarrow f \rightarrow c$, d због пута $b \rightarrow a \rightarrow d$, а f због пута $b \rightarrow e \rightarrow f$).

Формула $\exists y z (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge q(y, z))$ каже да је x такав елемент да имамо следећи троугао:

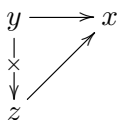


На слици имамо три таква троугла:

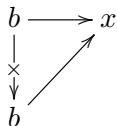


па дата формула описује $\{d, c, f\}$.

Коначно, формула $\exists y z (q(y, x) \wedge q(z, x) \wedge \neg q(y, z))$ каже да је x такав елемент да задовољава:



Сви елементи који имају улазну стрелицу задовољавају ову слику: ако је x било који елемент који има улазну стрелицу, тада он има улазну стрелицу из b , па x задовољава:



Такође b не задовољава дату формулу јер нема улазну стрелицу. Према томе, дата формула дефинише $\{a, c, d, e, f\}$. □

6. [бонус] Нека је $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такав да за сваке две тачке $A, B \in \mathcal{S}$ важи да је дужина дужи AB рационалан број. Доказати да је $|\mathcal{S}| \leq \aleph_0$.

Решење. Изаберимо две различите тачке $A, B \in \mathcal{S}$. (Ако не постоје, тада је $|\mathcal{S}| \leq 1 < \aleph_0$.) За рационалан број $q \geq 0$, означимо са k_q круг са центром A полупречника q , а са l_q круг са центром B полупречника q . (Круг полупречника 0 је само тачка.)

Уочимо скуп $\mathcal{T} = \bigcup \{k_q \cap l_r \mid q, r \in \mathbb{Q}, q, r \geq 0\}$. (\mathcal{T} је скуп свих пресечних тачака кругова са центром A рационалног полупречника и кругова са центром B рационалног полупречника.) Како два круга са различитим центрима имају највише две пресечне тачке, и како имамо пребројиво много парова (q, r) , где су q, r рационални бројеви, то је \mathcal{T} пребројива унија највише двочланих скупова, па је и \mathcal{T} пребројив скуп.

Довољно је још да приметимо да је $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Заиста, ако $X \in \mathcal{S}$, тада је по претпоставци X на рационалном растојању q од A и на рационалном растојању r од B . Према томе, $X \in k_q \cap l_r$, па $X \in \mathcal{T}$. \square