1. (а) **[15]** На Острву верника и неверника, странац је желео да сазна који од становника A, B, C, D, E и F су верници, а који неверници. Од њих је добио следеће изјаве:

B : Бар један од E и F је неверник.

C : D је верник, а E неверник.

D : A и E су верници.

E : Тачно један од C и F је верник.

Странац им је одговорио да и даље не зна ко је верник, а ко неверник. Онда је C додао: ,,Међу нама има бар два верника."

Странац је схватио ко су верници, а ко неверници. Шта је одговор?

(б) **[5]** Природном дедукцијом доказати:

$$p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q),\ \neg p \vee q \ \vdash\ p \Rightarrow r.$$

Решење. **(а)** Стандардном интерпретацијом слова a, b, c, d, e, f из прве четири изјаве имамо:

(1) $b \Leftrightarrow \neg e \vee \neg f = 1;$

(2) $c \Leftrightarrow d \wedge \neg e = 1;$

(3) $d \Leftrightarrow a \wedge e = 1;$

(4) $e \Leftrightarrow c \veebar f = 1.$

Како се слово e најчешће појављује, коментарисаћемо по њему. Ако је $e = 0$, из (1) одмах закључујемо $b = 1$, а из (3) $d = 0$. Такође (2) повлачи $c = d$, па је и $c = 0$. Коначно (4) каже $c \veebar f = 0$, тј. $f = c$, па је и $f = 0$. Приметимо да a може да буде и 0 и 1, па имамо два решења: $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ и $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Ако је $e = 1$, из (2) одмах закључујемо $c = 0$. (1) повлачи $b = \neg f$, (3) повлачи $d = a$, а (4) повлачи $c \veebar f = 1$, тј. $f = \neg c$. Дакле, $f = 1$, па је $b = 0$, а $d = a$ могу бити и 0 и 1. Опет имамо два решења: $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$ и $(1, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Дакле, полазни део задатка има четири решења. Приметимо да им је заједнично да је $c = 0$, тј. C је неверник. Према томе, његова последња изјава: ,,Међу нама има бар два верника." је лажна, тј. закључујемо да међу њима може бити највише један верник. Једино решење које се уклапа у то је $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, тј. B је верник, а сви остали су неверници.

(б) Једно извођење је:

1	$p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)$	претпоставка
2	$\neg p \vee q$	претпоставка
3	$\quad p$	додатна претпоставка
4	$\quad \neg r \Rightarrow \neg q$	$\Rightarrow_E$ на 1 и 3
5	$\quad \neg\neg p$	$\neg\neg_U$ на 3
6	$\quad q$	DS на 2 и 5
7	$\quad q \Rightarrow r$	K на 4
8	$\quad r$	$\Rightarrow_E$ на 6 и 7
9	$p \Rightarrow r$	$\Rightarrow_U$ на 3 – 8

□

2. **[10]** Решити скуповну једначину: $A \cup X = (A \cap X) \triangle B$.

Решење. Користећи карактеристичне функције имамо:

$$\begin{aligned} A \cup X = (A \cap X) \triangle B \quad & \text{акко} \quad \chi_{A\cup X} = \chi_{(A\cap X)\triangle B} \\ & \text{акко} \quad \chi_A + \chi_X + \chi_A\chi_X = \chi_A\chi_X + \chi_B \\ & \text{акко} \quad \chi_A + \chi_X = \chi_B \\ & \text{акко} \quad \chi_X = \chi_A + \chi_B \\ & \text{акко} \quad \chi_X = \chi_{A\triangle B} \\ & \text{акко} \quad X = A \triangle B. \end{aligned}$$

Према томе, једино решење је $X = A \triangle B$. □

3. **[10]** Нека је $f : X \longrightarrow Y$. Доказати да је f 1-1 акко за све $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ важи:

$$f^{-1}[f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B)] = A \smallsetminus f^{-1}[B].$$

Решење. $(\Rightarrow)$ Претпоставимо да је f 1-1. Да бисмо доказали $(\subseteq)$ претпоставимо да $x \in f^{-1}[f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B)]$. Тада $f(x) \in f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B)$, тј. $f(x) \in f[A]$ и $f(x) \notin f[A] \cap B$. Како $f(x) \in f[A]$ и $f(x) \notin f[A] \cap B$, закључујемо $f(x) \notin B$, одакле директно $x \notin f^{-1}[B]$. Како $f(x) \in f[A]$ и како је f 1-1, закључујемо да $x \in A$. Дакле, $x \in A \smallsetminus f^{-1}[B]$.

Да бисмо доказали $(\supseteq)$, претпоставимо $x \in A \smallsetminus f^{-1}[B]$, тј. $x \in A$ и $x \notin f^{-1}[B]$. Тада $f(x) \in f[A]$ и $f(x) \notin B$. Из $f(x) \notin B$ специјално имамо и $f(x) \notin f[A] \cap B$. Дакле, $f(x) \in f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B)$, одакле $x \in f^{-1}[f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B)]$. Приметимо да у овом делу нисмо морали да користимо претпоставку да је f 1-1.

$(\Leftarrow)$ Претпоставимо да важи дати услов. Како желимо да докажемо да је f 1-1, уочимо $x_1, x_2 \in X$ такве да је $f(x_1) = f(x_2) = y$, и докажимо да је $x_1 = x_2$. Да бисмо искористили дати услов треба да изаберемо неке подскупове $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ који ће нам, убацивањем у дату једнакост, дати $x_1 = x_2$. Како имамо изабране $x_1, x_2 \in X$ и $y \in Y$, неколико избора подскупова A и B се сами намећу. Нпр. природно нам се намећу само два избора за B: $B = \{y\}$ и $B = Y \smallsetminus \{y\}$. У овом задатку избор $B = \{y\}$ нам неће помоћи (Проверите!), па изаберимо $B = Y \smallsetminus \{y\}$. Такође, за A се природно намеће неколико подскупова; ми ћемо изабрати $A = \{x_1\}$.

Како је $B = Y \smallsetminus \{y\}$, тј. како $y \notin B$, то $x_1, x_2 \notin f^{-1}[B]$, па је десна страна једнакости $A \smallsetminus f^{-1}[B] = \{x_1\}$. Посматрајмо сада леву страну једнакости. Како је $f[A] = \{y\}$, то је $f[A] \cap B = \emptyset$, па је $f[A] \smallsetminus (f[A] \cap B) = f[A] = \{y\}$. Због тога x_1, x_2 припадају скупу на левој страни. Како је тај скуп једнак скупу на десној страни, који је како смо видели једнак $\{x_1\}$, добијамо $x_2 \in \{x_1\}$, што повлачи $x_1 = x_2$ као што смо желели. □

4. **[5]** У реалној равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дата је релација $\preccurlyeq$ са:

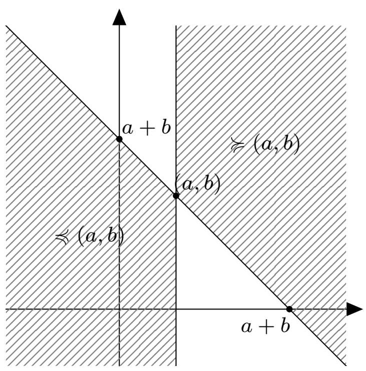
$$(a, b) \preccurlyeq (u, v) \qquad \text{акко} \qquad a \leqslant u \ \text{ и } \ a + b \leqslant u + v.$$

(а) Доказати да је $\preccurlyeq$ уређење на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(б) За произвољну тачку (a, b) нацртати скуп свих мањих тачака и скуп свих већих тачака у уређењу $\preccurlyeq$.

Решење. **(а)** Рефлексивност је јасна: $(a, b) \preccurlyeq (a, b)$ јер $a = a$ и $a + b = a + b$. Антисиметричност: Претпоставимо да је $(a, b) \preccurlyeq (u, v)$ и $(u, v) \preccurlyeq (a, b)$. Тада је $a \leqslant u$, $a + b \leqslant u + v$, $u + v \leqslant a + b$ и $u \leqslant a$. Одатле је $a = u$ и $a + b = u + v$, па је и $b = v$. Транзитивност: Претпоставимо да је $(a, b) \preccurlyeq (u, v) \preccurlyeq (s, t)$. Тада је $a \leqslant u \leqslant s$ и $a + b \leqslant u + v \leqslant s + t$, одакле директно $(a, b) \preccurlyeq (s, t)$.

(б) Да бисмо одредили скуп мањих тачака од (a, b) треба да решимо неједначину $(x, y) \preccurlyeq (a, b)$, тј. $x \leqslant a$ и $x + y \leqslant a + b$. Дакле, тачка (x, y) се налази лево од праве $x = a$ и испод праве $y = -x + (a + b)$ (види слику). Слично, тачке веће од (a, b) се налазе десно од праве $x = a$ и изнад $y = -x + (a + b)$.



□

5. **[5]** Доказати да је скуп свих двочланих подскупова од $\mathbb{N}$ пребројив.

Решење. Нека је S скуп свих двочланих подскупова од $\mathbb{N}$. Приметимо да је са:

$$f(\{m,n\}) = \begin{cases} (m,n) & \text{ако } m < n \\ (n,m) & \text{ако } n < m \end{cases}$$

добро дефинисано 1-1 пресликавање $S \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Како знамо да је $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ пребројив, закључујемо да је $|S| \leqslant \aleph_0$. Са друге стране, са $g(n) = \{n, n+1\}$ је дефинисано 1-1 пресликавање $\mathbb{N} \longrightarrow S$, па је и $\aleph_0 \leqslant |S|$. По Кантор-Бернштајновој теореми је $|S| = \aleph_0$. $\square$

6. **(а)** **[10]** На слици је дат модел језика $\mathcal{L} = \{q\}$ ($\mathrm{ar}(q) = 2$ и q је представљено стрелицом). За сваки елемент модела одредити формулу која га дефинише.

(б) **[5]** Које скупове дефинишу формуле:
- $\exists\, y\,(q(x,y) \wedge q(y,y))$; • $\exists\, y\,(q(x,y) \Rightarrow q(x,x))$;
- $\exists\, y\, \exists\, z\,(q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,x))$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[loop right] \arrow[d] \\ f \arrow[u] & e \arrow[l] & d \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Решење. **(а)** Уочимо следећу „формулу":

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left] \arrow[r] & y \arrow[r] & z \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

где су x и y различити елементи. То је формула која се на датом језику записује:

$$q(x,x) \wedge q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,z) \wedge x \neq y.$$

Ту формулу у датом моделу задовољава једино тројка $(x,y,z) = (a,b,c)$, па су елементи a, b и c дефинисани следећим формулама:

$F_a(x) = \exists yz\,(q(x,x) \wedge q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,z) \wedge x \neq y)$;

$F_b(y) = \exists xz\,(q(x,x) \wedge q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,z) \wedge x \neq y)$;

$F_c(z) = \exists xy\,(q(x,x) \wedge q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,z) \wedge x \neq y)$;

Приметимо да морамо да претпоставимо у претходном делу $x \neq y$, јер формула $q(x,x) \wedge q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,z)$ има још два решења: $(x,y,z) = (a,a,a)$ и $(x,y,z) = (c,c,c)$.

Како је d елемент у кога иде стрелица из c, њега можемо да дефинишемо формулом: $F_d(x) = \exists z\,(F_c(z) \wedge q(z,x) \wedge z \neq x)$. Приметимо да смо опет морали да додамо $z \neq x$, јер формула $\exists z\,(F_c(z) \wedge q(z,x))$ има два решења: $x = c$ и $x = d$.

Како је e елемент у кога иде стрелица из d, кога смо већ дефинисали, он је дефинисан формулом: $F_e(x) = \exists y\,(F_d(y) \wedge q(y,x))$. Слично, како је f елемент у кога исте стрелица из e, кога смо већ дефинисали, он је дефинисан формулом: $F_f(x) = \exists y\,(F_e(y) \wedge q(y,x))$.

Пробајте да дефинишете све елементе без позивања на раније дефинисане. Једна идеја како то можемо да урадимо је следећа. Уочимо „формулу":

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left] \arrow[r] & y \arrow[r] & z \arrow[loop above] \arrow[r] & u \arrow[r] & v \arrow[r] & w \end{tikzcd},$$

где су x и y различити, и z и u различити. Та формула има једно решење.

(б) Формула $\exists y\,(q(x,y) \wedge q(y,y))$ каже да постоји y такво да:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Тада y мора бити a или c, а x је онда елемент из кога стрелица иде у a, односно c. Како „не пише" да су x и y различити, решења претходног графа су:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] & a \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r] & a \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r] & c \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r] & c \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

па су решења полазне формуле: f, a, b, c.

Формула $\exists y\,(q(x,y) \Rightarrow q(x,x))$ каже да постоји y тако да важи импликација $q(x,y) \Rightarrow q(x,x)$. Како је импликација тачна када је њена лева страна нетачна, ову импликацију задовољавају сви парови (x,y) такви да из x не иде стрелица у y. Нпр. задовољавају је парови (a,f), (b,a), (c,b), (d,c), (e,d) и (f,e). Дакле, x може бити било који елемент a,b,c,d,e,f, па су решења полазне формуле сви елементи модела: a,b,c,d,e,f.

Коначно, формула $\exists yz\,(q(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,x))$ каже да постоје y и z такви да важи слика:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[dl] \\ z \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Приметимо да у формули не пише да су x, y, z различити елементи, па видимо да су решења претходне слике (a, a, a) и (c, c, c). Ако су нека два елемента различита, лако видимо да дата слика нема решење. Дакле, једина решења полазне формуле су a и c. $\square$