Увод у математичку логику, колоквијум (А) I, II *и* IV *ток* *2. децембар 2012.*

1. Ако су $(A \veebar B) \veebar C$ и $B \Leftrightarrow C$ таутологије, доказати да је A таутологија.

   Решење. Претпоставимо супротно да A није таутологија, тј. да постоји валуиацција v таква да је $A =_v 0$. Размотримо два случаја: $B =_v 0$ и $B =_v 1$.

   Ако је $B =_v 0$, тада је $A \veebar B =_v 0$, па како је $(A \veebar B) \veebar C$ таутологија, то је $C =_v 1$. Одатле је $B \Leftrightarrow C =_v 0$, што је контрадикција са $B \Leftrightarrow C$ је таутологија.

   Ако је $B =_v 1$, тада је $A \veebar B =_v 1$, па како је $(A \veebar B) \veebar C$ таутологија, то је $C =_v 0$. Одатле је $B \Leftrightarrow C =_v 0$, што је контрадикција са $B \Leftrightarrow C$ је таутологија.

   Дакле, ниједан случај није могућ, према томе A је таутологија.

2. Одредити све нееквивалентне формуле A чија су слова p, q, r такве да је следећа формула таутологија: $[(p \wedge q) \vee A] \Leftrightarrow [(q \wedge A) \vee r]$.

   Решење. Напишимо таблицу дате формуле:

p	q	r	A	$p \wedge q$	$L = (p \wedge q) \vee A$	$q \wedge A$	$D = (q \wedge A) \vee r$	$L \Leftrightarrow D$
0	0	0	a_1	0	a_1	0	0	$\neg a_1$
0	0	1	a_2	0	a_2	0	1	a_2
0	1	0	a_3	0	a_3	a_3	a_3	1
0	1	1	a_4	0	a_4	a_4	1	a_4
1	0	0	a_5	0	a_5	0	0	$\neg a_5$
1	0	1	a_6	0	a_6	0	1	a_6
1	1	0	a_7	1	1	a_7	a_7	a_7
1	1	1	a_8	1	1	a_8	1	1

   Дата формула је таутологија ако и само ако је $a_1 = a_5 = 0$ и $a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 1$. a_3 и a_8 су произвољни, па имамо четири нееквивалентне формуле. Њихове таблице су:

p	q	r	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

   Запишимо тражене формуле у ККНФ. $A_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, $A_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$, $A_3 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ и $A_4 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$.

3. Испитати да ли је $\{\Rightarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника.

   Решење. Приметимо да је $\neg p \equiv p \Rightarrow (p \veebar p)$. Како је $\{\neg, \Rightarrow\}$ потпун скуп везника и како нам претходни закон каже да се $\neg$ може записати преко $\Rightarrow$ и $\veebar$, то је и $\{\Rightarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника.

4. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $A \wedge (B \wedge C) \vdash \neg B \Rightarrow D$.

   Решење. Користимо леме са важби: $A \wedge B \vdash A$ и $A \wedge B \vdash B$.

1.	хип.	$A \wedge (B \wedge C)$
2.	лема (1)	$B \wedge C$
3.	лема (2)	B
4.	теорема	$B \Rightarrow (\neg B \Rightarrow D)$
5.	МП(3,4)	$\neg B \Rightarrow D$

5. Методом таблоа доказати да је следећа формула таутологија:

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [\neg(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg r)].$$

Решење.

$$0.\, \mathcal{F}\, (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [\neg(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg r)]$$

$$1(0)\, \mathcal{T}\, p \wedge q \Rightarrow r$$

$$2(0)\, \mathcal{F}\, \neg(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg r)$$

$$3(2)\, \mathcal{T}\, \neg(q \Rightarrow \neg p)$$

$$4(2)\, \mathcal{F}\, \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg r)$$

$$5(3)\, \mathcal{F}\, q \Rightarrow \neg p$$

$$6(4)\, \mathcal{T}\, p \wedge q \Rightarrow \neg r$$

$$7(5)\, \mathcal{T}\, q$$

$$8(5)\, \mathcal{F}\, \neg p$$

$$9(8)\, \mathcal{T}\, p$$

- $10(1)\, \mathcal{F}\, p \wedge q$
  - $12(10)\, \mathcal{F}\, p$
    - $\times(9, 12)$
  - $13(10)\, \mathcal{F}\, q$
    - $\times(7, 13)$
- $11(1)\, \mathcal{T}\, r$
  - $14(6)\, \mathcal{F}\, p \wedge q$
    - $16(6)\, \mathcal{F}\, p$
      - $\times(9, 16)$
    - $17(6)\, \mathcal{F}\, q$
      - $\times(7, 17)$
  - $15(6)\, \mathcal{T}\, \neg r$
    - $18(15)\, \mathcal{F}\, r$
      - $\times(11, 18)$

Увод у математичку логику, колоквијум (Б) I, II *и* IV *ток* *2. децембар 2012.*

1. Ако је $(A \veebar B) \veebar C$ таутологија и $B \Leftrightarrow C$ контрадикција, доказати да је A контрадикција.

   Решење. Претпоставимо супротно да A није контрадикција, тј. да постоји валуиација v таква да је $A =_v 1$. Размотримо два случаја: $B =_v 0$ и $B =_v 1$.

   Ако је $B =_v 0$, тада је $A \veebar B =_v 1$, па како је $(A \veebar B) \veebar C$ таутологија, то је $C =_v 0$. Одатле је $B \Leftrightarrow C =_v 1$, што је контрадикција са $B \Leftrightarrow C$ је контрадикција.

   Ако је $B =_v 1$, тада је $A \veebar B =_v 0$, па како је $(A \veebar B) \veebar C$ таутологија, то је $C =_v 1$. Одатле је $B \Leftrightarrow C =_1$, што је контрадикција са $B \Leftrightarrow C$ је контрадикција.

   Дакле, ниједан случај није могућ, према томе A је контрадикција.

2. Одредити све нееквивалентне формуле A чија су слова p, q, r такве да је следећа формула контрадикција: $[(p \wedge q) \vee A] \veebar [(q \wedge A) \vee r]$.

   Решење. Напишимо таблицу дате формуле:

p	q	r	A	$p \wedge q$	$L = (p \wedge q) \vee A$	$q \wedge A$	$D = (q \wedge A) \vee r$	$L \veebar D$
0	0	0	a_1	0	a_1	0	0	a_1
0	0	1	a_2	0	a_2	0	1	$\neg a_2$
0	1	0	a_3	0	a_3	a_3	a_3	0
0	1	1	a_4	0	a_4	a_4	1	$\neg a_4$
1	0	0	a_5	0	a_5	0	0	a_5
1	0	1	a_6	0	a_6	0	1	$\neg a_6$
1	1	0	a_7	1	1	a_7	a_7	$\neg a_7$
1	1	1	a_8	1	1	a_8	1	0

   Дата формула је контрадикција ако и само ако је $a_1 = a_5 = 0$ и $a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 1$. a_3 и a_8 су произвољни, па имамо четири нееквивалентне формуле. Њихове таблице су:

p	q	r	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

   Запишимо тражене формуле у ККНФ. $A_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, $A_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$, $A_3 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ и $A_4 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$.

3. Испитати да ли је $\{\Leftarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника, где је $p \Leftarrow q := q \Rightarrow p$.

   Решење. Приметимо да је $\neg p \equiv (p \veebar p) \Leftarrow p$. Како је $\{\neg, \Rightarrow\}$ потпун скуп везника и $p \Rightarrow q \equiv q \Leftarrow p$, то је и $\{\neg, \Leftarrow\}$ потпун скуп. Како нам претходни закон каже да се $\neg$ може записати преко $\Leftarrow$ и $\veebar$, то је и $\{\Leftarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника.

4. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $(A \wedge B) \wedge C \vdash D \Rightarrow B$.

   Решење. Користимо леме са важби: $A \wedge B \vdash A$ и $A \wedge B \vdash B$.

1.	хип.	$(A \wedge B) \wedge C$
2.	лема (1)	$A \wedge B$
3.	лема (2)	B
4.	аксиома 1	$B \Rightarrow (D \Rightarrow B)$
5.	МП(3,4)	$D \Rightarrow B$

5. Методом таблоа доказати да је следећа формула таутологија:

$$(r \Rightarrow p \vee q) \Rightarrow [(\neg r \Rightarrow p \vee q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)].$$

Решење.