Увод у математичку логику, колоквијум (А) <u>*I и IV ток*</u> *16. новембар 2013.*

1. Одредити све нееквивалентне формуле A чија су слова p и q такве да је формула $F = (p \Leftrightarrow A) \vee (q \Leftrightarrow A)$ таутологија.

Решење. Напишимо таблицу дате формуле:

p	q	A	$B = p \Leftrightarrow A$	$C = q \Leftrightarrow A$	$F = B \vee C$
0	0	a_1	$\neg a_1$	$\neg a_1$	$\neg a_1$
0	1	a_2	$\neg a_2$	a_2	1
1	0	a_3	a_3	$\neg a_3$	1
1	1	a_4	a_4	a_4	a_4

Формула F је таутологија ако и само ако је $a_1 = 0$ и $a_4 = 1$, док $a_2, a_3 \in \{0, 1\}$. Према томе постоје четири нееквивалентне формуле које задовољавају тражени услов, и њихове таблеце су:

p	q	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Тражене формуле су: $A_1 = p \wedge q$, $A_2 = p$, $A_3 = q$ и $A_4 = p \vee q$. □

2. Записати формулу $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg s)$ у КНФ.

Решење.

$$\begin{aligned}
(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg s) &\equiv [(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg s)] \wedge [(r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)] \\
&\equiv [\neg(\neg\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee \neg s)] \wedge [\neg(\neg r \vee \neg s) \vee (\neg\neg p \vee q)] \\
&\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee \neg s] \wedge [(r \wedge s) \vee p \vee q] \\
&\equiv (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee p \vee q) \wedge (s \vee p \vee q).
\end{aligned}$$

□

3. Доказати да је $\{\vee, \Leftrightarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника.

Решење. Како у исказној алгебри важе једнакости: $a \veebar a = 0$ и $a \Leftrightarrow 0 = \neg a$, то је $\neg p \equiv p \Leftrightarrow (p \veebar p)$. Како је $\{\neg, \vee\}$ потпун скуп везника, то је и $\{\vee, \veebar, \Leftrightarrow\}$ потпун скуп везника. □

4. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $A, A \Leftrightarrow B \vdash B$.

Решење. На вежбама смо доказали: лему $F \wedge G \vdash F$. Како је $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то важи $A \Leftrightarrow B \vdash A \Rightarrow B$ $(\star)$. Доказ тврђења је:

1.	хипотеза	A
2.	хипотеза	$A \Leftrightarrow B$
3.	$(\star)(2)$	$A \Rightarrow B$
4.	МП(1,3)	B

□

5. Методом резолуције доказати да је следећа формула таутологија: $F = (p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow r)]$.

Решење. Запишимо формулу $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &= \neg[(p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow r)]] \\
&= (p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge \neg r \\
&= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r
\end{aligned}$$

Изводимо доказ за $\emptyset$:

$C_1 = \{\neg p, q, r\}$	
$C_2 = \{p, q\}$	
$C_3 = \{\neg q, p\}$	
$C_4 = \{\neg p, r\}$	
$C_5 = \{\neg r\}$	
$C_6 = \{q, r\}$	$\mathrm{Res}(C_1, C_2; \neg p, p)$
$C_7 = \{\neg q, r\}$	$\mathrm{Res}(C_3, C_4; p, \neg p)$
$C_8 = \{r\}$	$\mathrm{Res}(C_6, C_7; q, \neg q)$
$C_9 = \emptyset$	$\mathrm{Res}(C_5, C_8; \neg r, r)$

Како смо извели $\emptyset$, формула $\neg F$ је контрадикција, па је F таутологија. $\square$

Увод у математичку логику, колоквијум (Б) <u>*I и IV ток*</u> *16. новембар 2013.*

1. Одредити све нееквивалентне формуле A чија су слова p и q такве да је формула $F = (p \Leftrightarrow A) \wedge (q \Leftrightarrow A)$ контрадикција.

   Решење. Напишимо таблицу дате формуле:

p	q	A	$B = p \Leftrightarrow A$	$C = q \Leftrightarrow A$	$F = B \wedge C$
0	0	a_1	$\neg a_1$	$\neg a_1$	$\neg a_1$
0	1	a_2	$\neg a_2$	a_2	0
1	0	a_3	a_3	$\neg a_3$	0
1	1	a_4	a_4	a_4	a_4

   Формула F је контрадикција ако и само ако је $a_1 = 1$ и $a_4 = 0$, док $a_2, a_3 \in \{0, 1\}$. Према томе постоје четири нееквивалентне формуле које задовољавају тражени услов, и њихове таблеце су:

p	q	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0

   Тражене формуле су: $A_1 = p \downarrow q$, $A_2 = \neg q$, $A_3 = \neg p$ и $A_4 = p \uparrow q$. $\square$

2. Записати формулу $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow s)$ у КНФ.

   Решење.

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow s) &\equiv [(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow s)] \wedge [(\neg r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)] \\
&\equiv [\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg\neg r \vee s)] \wedge [\neg(\neg\neg r \vee s) \vee (\neg p \vee \neg q)] \\
&\equiv [(p \wedge q) \vee r \vee s] \wedge [(\neg r \wedge \neg s) \vee \neg p \vee \neg q] \\
&\equiv (p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg s \vee \neg p \vee \neg q)
\end{aligned}$$

   $\square$

3. Доказати да је $\{\wedge, \Leftrightarrow, \veebar\}$ потпун скуп везника.

   Решење. Како у исказној алгебри важе једнакости: $a \veebar a = 0$ и $a \Leftrightarrow 0 = \neg a$, то је $\neg p \equiv p \Leftrightarrow (p \veebar p)$. Како је $\{\neg, \wedge\}$ потпун скуп везника, то је и $\{\wedge, \veebar, \Leftrightarrow\}$ потпун скуп везника. $\square$

4. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $A \Leftrightarrow B, B \vdash A$.

   Решење. На вежбама смо доказали: лему $F \wedge G \vdash G$. Како је $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то важи $A \Leftrightarrow B \vdash B \Rightarrow A$ $(\star)$. Доказ тврђења је:

1.	хипотеза	$A \Leftrightarrow B$
2.	хипотеза	B
3.	$(\star)(1)$	$B \Rightarrow A$
4.	МП(2,3)	A

   $\square$

5. Методом резолуције доказати да је следећа формула таутологија: $F = (p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow r)]$.

   Решење. Запишимо формулу $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &= \neg[(p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow r)]] \\
&= (p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge \neg r \\
&= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \neg r
\end{aligned}$$

   Изводимо доказ за $\emptyset$:

$C_1 = \{\neg p, q, r\}$	
$C_2 = \{p, q\}$	
$C_3 = \{\neg p, r\}$	
$C_4 = \{\neg q, p\}$	
$C_5 = \{\neg r\}$	
$C_6 = \{q, r\}$	$\mathrm{Res}(C_1, C_2; \neg p, p)$
$C_7 = \{\neg q, r\}$	$\mathrm{Res}(C_3, C_4; \neg p, p)$
$C_8 = \{r\}$	$\mathrm{Res}(C_6, C_7; q, \neg q)$
$C_9 = \emptyset$	$\mathrm{Res}(C_5, C_8; \neg r, r)$

Како смо извели $\emptyset$, формула $\neg F$ је контрадикција, па је F таутологија. $\square$