Увод у математичку логику, Предрок 2015. *13. јануар 2015.*

1. На Острву верника и неверника један од становника A и B је починио убиство пред сведоцима C и D. Познато је да је убиство почињено или бејзбол палицом или свећњаком. Инспектор, који није са острва, је добио следеће изјаве:

A: Ако је D неверник, онда је убиство почињено бејзбол палицом.

B: Ако је A верник, онда је C неверник и A је убица.

A: B лаже!

C: B је неверник и убица.

D: B је изјавио: "A је неверник или је убиство почињено свећњаком.".

Шта инспектор из ових изјава може да закључи? Ко је верник? Ко је неверник? Ко је убица? Чиме је почињено убиство?

Решење. Означимо са p исказ "A је убица.", а са q исказ "Убиство је почињено бејзбол палицом.". Тада $\neg p$ значи "B је убица.", а $\neg q$ значи "Убиство је почињено свећњаком." Из изјава добијамо:

$$a \Leftrightarrow (\neg d \Rightarrow q) = 1 \tag{1}$$

$$b \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg c \wedge p) = 1 \tag{2}$$

$$a \Leftrightarrow \neg b = 1 \tag{3}$$

$$c \Leftrightarrow \neg b \wedge \neg p = 1 \tag{4}$$

$$d \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow \neg a \vee \neg q) = 1 \tag{5}$$

Коментаришемо по слову a. Ако је $a = 0$, тада из (3) имамо да је $b = 1$. Из (1) имамо да је $\neg d \Rightarrow q = 0$, па је $d = 0$ и $q = 0$. Сада је $d \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow \neg a \vee \neg q) = 0 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow \neg 0 \vee \neg 0) = 0 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, што је у контрадикцији са (5).

Дакле, $a = 1$. Према (3) $b = 0$. Из (2) тада добијамо да је $\neg c \wedge p = 0$. Из (4) је $1 = c \Leftrightarrow \neg 0 \wedge \neg p = c \Leftrightarrow \neg p$, тј. $c = \neg p$, па из $\neg c \wedge p = 0$ добијамо $p \wedge p = 0$, тј. $p = 0$ и $c = 1$.

Сада је из (5) $1 = d \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow \neg 1 \vee \neg q) = d \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow \neg q) = d \Leftrightarrow q$, одакле $d = q$, па (1) постаје $1 = 1 \Leftrightarrow (\neg d \Rightarrow d) = \neg d \Rightarrow d = d$, одакле је $d = 1$ и $q = 1$.

Дакле, A, C, D су верници, B је неверник, B је убица и убиство је почињено бејзбол палицом. $\dashv$

2. Нека су A, B, C неки скупови, $L = A \cap (B \cup C)$ и $D = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

(а) Испитати да ли у општем случају важе $L \subseteq D$ и $L \supseteq D$.

(б) Доказати да је $L = D$ ако и само ако је $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Решење. Рачунамо карактеристичне функције: $\chi_L = \chi_{A \cap (B \cup C)} = \chi_A \chi_{B \cup C} = \chi_A(\chi_B + \chi_C + \chi_B \chi_C) = \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C$; $\chi_D = \chi_{(A \cap B) \triangle (A \cap C)} = \chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap C} = \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C$.

(б) Видимо да је $L = D$ акко $\chi_L = \chi_D$ акко $\chi_A \chi_B \chi_C = 0$ акко $\chi_{A \cap B \cap C} = \chi_\emptyset$ акко $A \cap B \cap C = \emptyset$.

(а) Како је $\chi_{L \cap D} = \chi_L \chi_D = (\chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C)(\chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C) = \ldots = \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C = \chi_D$, одакле је $L \cap D = D$, тј. $D \subseteq L$ у општем случају. $\dashv$

3. Нека је $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Доказати: $f[A \smallsetminus f^{-1}[B]] = f[A] \smallsetminus B$.

Решење. $\subseteq$: Нека $y \in F[A \smallsetminus f^{-1}[B]]$. Тада постоји $x \in A \smallsetminus f^{-1}[B]$ такав да $y = f(x)$. Како $x \in A \smallsetminus f^{-1}[B]$, то $x \in A$ и $x \notin f^{-1}[B]$, одакле $f(x) \in f[A]$ и $f(x) \notin B$. Дакле, $y = f(x) \in f[A] \smallsetminus B$.

$\supseteq$: Нека сада $y \in f[A] \smallsetminus B$, тј. $y \in f[A]$ и $y \notin B$. Како $y \in f[A]$, то је $y = f(x)$ за неко $x \in A$. Из $f(x) = y \notin B$ добијамо $x \notin f^{-1}[B]$. Дакле, $x \in A$ и $x \notin f^{-1}[B]$, па $x \in A \smallsetminus f^{-1}[B]$, одакле $y = f(x) \in f[A \smallsetminus f^{-1}[B]]$. $\dashv$

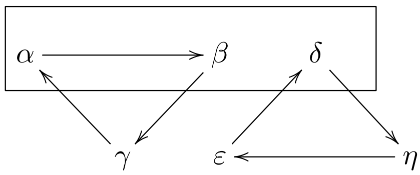
4. Конструисати бијекцију између скупова $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$.

Решење. Конструишемо бијекцију $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \{0,1\}$ тако да парне целе бројеве сликамо на $\mathbb{Z} \times \{0\}$, а непарне на $\mathbb{Z} \times \{1\}$. Експлицитно:

$$f(n) = \begin{cases} (\frac{n}{2}, 0), & \text{ако } n = 0 \mod 2 \\ (\frac{n-1}{2}, 1), & \text{ако } n = 1 \mod 2 \end{cases}.$$

$\dashv$

5. На скупу $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$ дефинисан је модел $\mathbb{A}$ језика $\mathcal{L} = \{p, r\}$ $(\operatorname{ar} p = 1, \operatorname{ar} r = 2)$, следећом сликом ($p^{\mathbb{A}}$ је представљен правоугаоником, $r^{\mathbb{A}}$ је представљен стрелицама):



Записати формуле $F_a(x)$, за све $a \in A$, такве да $F_a(x)$ дефинише a.

Решење. α је једини елемент у p из кога излази стрелица ка елементу у p, па можемо узети:

$$F_\alpha(x) = p(x) \wedge \exists y(p(y) \wedge r(x,y)).$$

Слично, β је једини елемент у p у кога улази стрелица из елемента који је у p:

$$F_\beta(x) = p(x) \wedge \exists y(p(y) \wedge r(y,x)).$$

Слична објашњења дефинишу ε и η:

$$F_\varepsilon(x) = \neg p(x) \wedge \exists y(\neg p(y) \wedge r(y,x)),$$

$$F_\eta(x) = \neg p(x) \wedge \exists y(\neg p(y) \wedge r(x,y)).$$

Елемент δ је једини елемент у кога улази стрелица из елемента ван p и из кога излази стрелица ка елементу ван p:

$$F_\delta(x) = \exists y \exists z(\neg p(y) \wedge \neg p(z) \wedge r(y,x) \wedge r(x,z)).$$

Слично објашњење важи и за γ:

$$F_\gamma(x) = \exists y \exists z(p(y) \wedge p(z) \wedge r(y,x) \wedge r(x,z)).$$

$\dashv$